dove

$$x_A = \frac{\omega_y v_z - \omega_z v_y}{\omega^2}, \quad y_A = \frac{\omega_z v_x - \omega_x v_z}{\omega^2}, \quad z_A = \frac{\omega_x v_y - \omega_y v_x}{\omega^2};$$

con $\vec{v}(O) = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}$ ed $\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2$. Lasciamo al lettore di adattare le formule (4.5.7) al caso in cui, nel nostro sistema di riferimento, si annullino alcune delle componenti del risultante $\vec{\omega}$.

La retta che abbiamo individuato, all'istante t, è il luogo dei punti che si muovono con velocità $\vec{v}_p$. Questa retta è detta *asse istantaneo di moto (o asse di Mozzi)*, la cui esistenza è assicurata istante per istante quando sia $\vec{\omega}(t) \neq 0$, essa è parallella ad $\vec{\omega}$, ed i suoi punti *o sono istantaneamente fermi (quando $\vec{v}_p = 0$) o si muovono con velocità $\vec{v}_p$ parallela ad $\vec{\omega}$.*

Se ricordiamo la definizione di asse centrale, come luogo dei punti dello spazio rispetto ai quali il momento risultante è parallelo al vettore risultante $\vec{R}$, ovvero si riduce alla sola parte parallela e che quindi ha il modulo minimo, si vede la perfetta analogia con l'asse istantaneo di moto. Quindi la derivazione dell'asse di moto è perfettamente analoga a quella dell'asse centrale, con la sola differenza che qui i vettori (velocità invece dei momenti) sono dipendenti dal tempo e quindi l'asse ha la caratteristica di essere calcolato istante per istante.

Vedremo poi cosa succede durante il moto, al variare del tempo, di questa asse di moto.

4.6 Rigata fissa e rigata mobile

Abbiamo visto che quando $\vec{\omega} \neq 0$ esiste una retta, all'istante t, i cui punti hanno velocità diretta secondo il vettore $\vec{\omega}$, di equazione

$$P(t) - O(t) = \frac{\vec{\omega}(t) \wedge \vec{v}(O)(t)}{\omega^2(t)} + \lambda\vec{\omega}(t).$$

dove λ è un parametro reale qualsiasi e $t > 0$.

Con riferimento al sistema fisso Σ, il luogo delle successive posizioni dell'asse di istantanea rotazione è una superficie rigata, che viene detta *rigata fissa del moto.* Analogamente nel sistema S solidale al corpo rigido, le posizioni dell'asse di istantanea rotazione generano un'altra rigata, detta *rigata mobile del moto.*

Nella rappresentazione del sistema S mobile rispetto a Σ, all'istante t, le rigate fissa e mobile hanno la stessa generatrice, lungo la quale le due rigate sono a contatto. Durante il moto, i punti di tale asse o subiscono un momentaneo arresto oppure hanno velocità parallela all'asse stessa, quindi o le due rigate non strisciano l'una sull'altra o al più possono *slittare* l'una sull'altra lungo la generatrice di contatto. In ogni caso per effetto della rotazione $\vec{\omega}$, la rigata mobile solidale con il corpo rigido ruota dell'angolo ωdt intorno all'asse nell'intervallo di tempo infinitesimo dt.

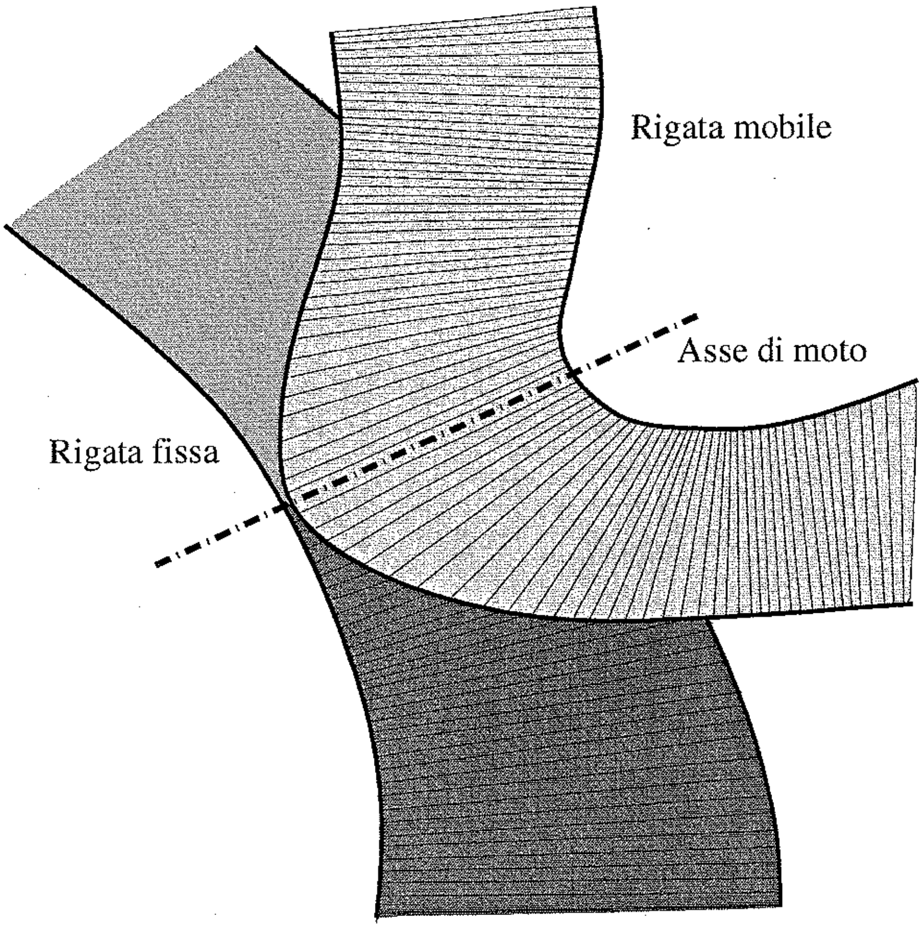


Figura 4.11 Rigate di moto

In questa rotazione vengono a contatto le due nuove generatrici infinitamente vicine.

In conclusione *in un moto rigido, la rigata mobile rotola sulla rigata fissa, scorrendo lungo la generatrice di contatto con velocità* $v_p = \vec{v}(O) \cdot \mathrm{vers}\,\vec{\omega}$.

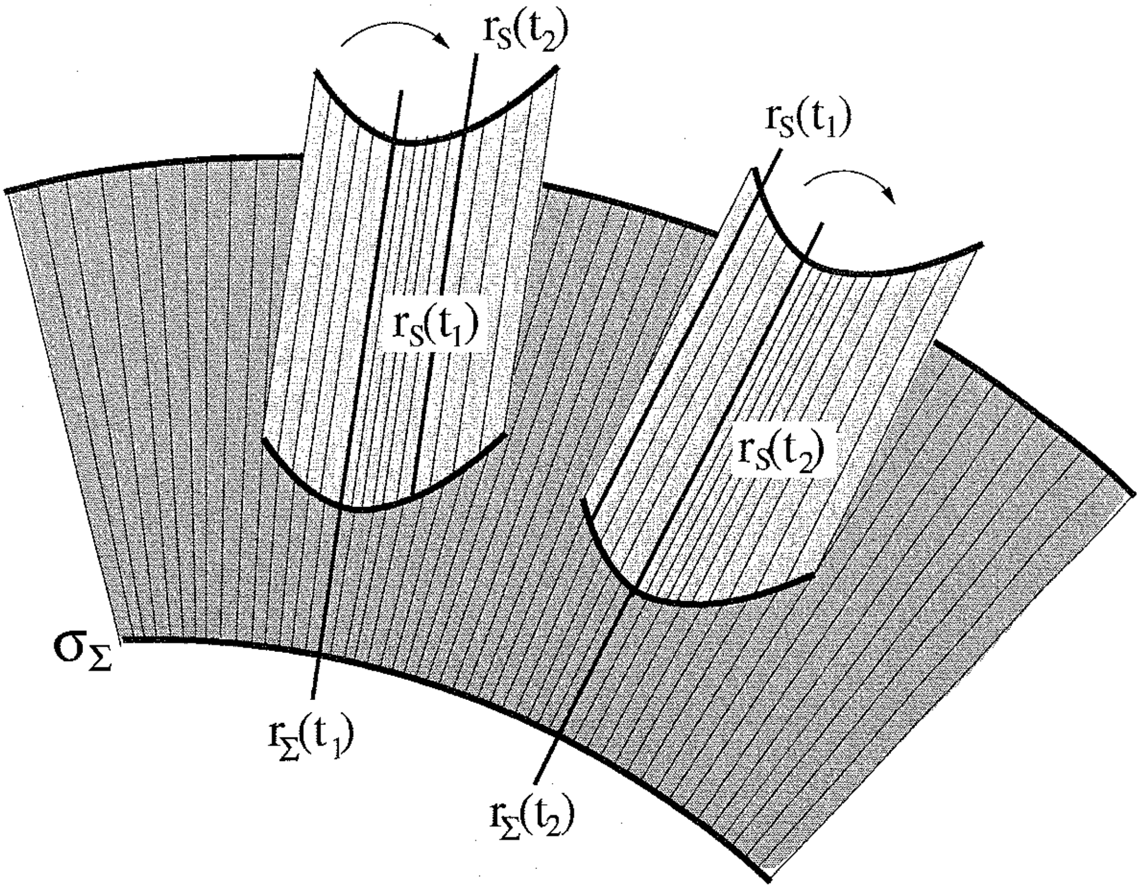
Questi aspetti sono alla base della trasmissione dei movimenti rigidi, mediante l'accoppiamento di superficie rigate, di interesse in Meccanica Applicata.

4.7 Ancora sulle rigate del moto

L'equazione

$$P(t) - O(t) = \frac{\vec{\omega}(t) \wedge \vec{v}(O)(t)}{\omega^2(t)} + \lambda\vec{\omega}(t).$$

al variare di λ dà una retta parallela ad $\vec{\omega}$ e passante per A. Al variare del tempo la retta genera una superficie.



Indichiamo con σ_Σ la superficie generata dalla retta per $P(t)$ nel sistema fisso Σ, e con σ_S la superficie generata dalla retta per $P(t)$ nel sistema mobile S; e distinguiamo $P_\Sigma(t)$ da $P_S(t)$ per indicare quando vediamo il punto $P(t)$ come visto dal sistema fisso e dal sistema mobile, rispettivamente. In ogni istante il punto P dà un $P_\Sigma(t)$ in Σ ed un $P_S(t)$ in S. Passando alle rette, sia $r(t)$ la retta ottenuta al variare di λ, all'istante t. All'istante di tempo t_1 si ha

$$r(t_1) = r_\Sigma(t_1) = r_S(t_1)\,,$$

ovvero l'asse istantaneo di moto si può vedere sia come retta nel sistema fisso Σ, sia come retta nel sistema mobile S. In un istante di tempo successivo $t_2 > t_1$, la retta $r(t_2)$ è in genere diversa da $r(t_1)$. La retta $r(t_1) = r_S(t_1)$ ha perso la proprietà di essere asse istantaneo di moto, comunque $r_\Sigma(t_1)$ e $r_S(t_1)$ rimangono due rette delle due superficie σ_Σ e σ_S. La nuova retta $r(t_2)$ ha ora la proprietà di essere asse istantaneo di moto, che $r_\Sigma(t_1)$ e $r_S(t_1)$ hanno perso e che $r_\Sigma(t_2)$ e $r_S(t_2)$, che coincidono all'istante t_2, hanno in questo istante.

Disegnamo all'istante t la superficie σ_Σ e la superficie σ_S a contatto, lungo la retta $r(t)$. Vediamo ora il moto del punto $P = P(t)$, fissato un certo valore di λ, come punto che ha la proprietà di appartenere all'asse istantaneo di moto all'istante t. Quel punto dell'asse istantaneo di moto, ovvero che ha la proprietà di appartenere all'asse istantaneo di moto, si sposta sia su σ_Σ, che su σ_S, con velocità (in genere diverse), che indichiamo con

$$\vec{v}_\Sigma(P) \qquad \text{e} \qquad \vec{v}_S(P) \qquad \text{all'istante } t\,.$$

Con riferimento alla figura, $\vec{v}_\Sigma(P)$ indica la velocità con cui il punto P, quello che ha la proprietà di appartenere all'asse istantaneo, si sposta su σ_Σ, $\vec{v}_S(P)$ indica la velocità con cui il punto P si sposta su σ_S. La velocità relativa $\vec{v}_S(P)$ e la velocità assoluta $\vec{v}_\Sigma(P)$ sono legate dalla relazione

$$\vec{v}_\Sigma(P) = \vec{v}_S(P) + \vec{v}_T(P),$$

dove la velocità di trascinamento $\vec{v}_T$ è proprio data dalla componente parallela della velocità

$$\vec{v}_p = \frac{\vec{v}(O) \cdot \vec{\omega}}{\vec{\omega}^2}\vec{\omega}\,,$$

cioè il punto P si muove sull'asse istantaneo di moto di trascinamento con velocità pari alla componente parallela (di P, come punto del corpo rigido).

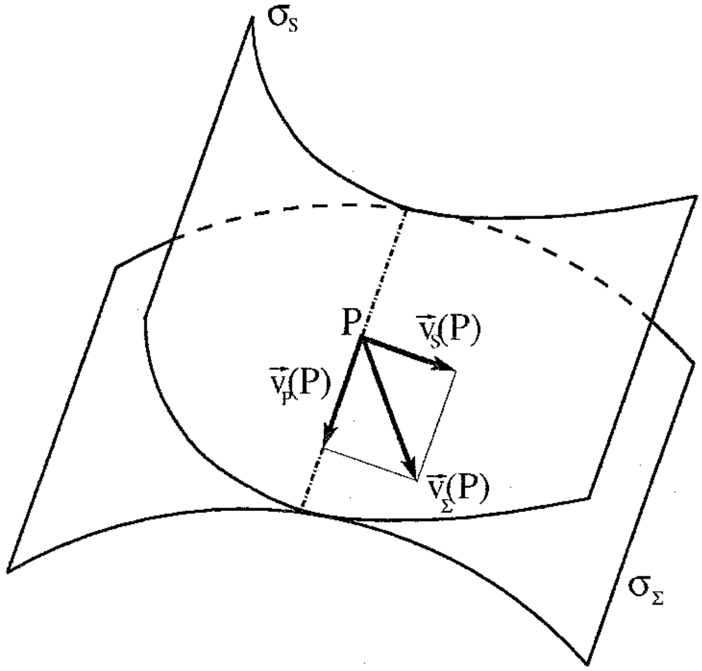


Figura 4.12 Punti sulla generatrice

Le due superficie mobile e fissa sono tangenti fra loro istante per istante, la superficie mobile rotola su quella fissa, durante il moto, e, se la parte parallela è diversa da zero, allora i punti della retta generatrice della rigata mobile slittano sulla generatrice della rigata fissa con velocità $\vec{v}_p$.

Nota 4.7.1 Si osservi fin da ora, che nel caso di moti con invariante scalare nullo (vedi avanti i moti rigidi piani) allora $\vec{v}_\Sigma(P) = \vec{v}_S(P)$, ed il centro istantaneo di moto è istantaneamente fermo.

4.8 Moti rigidi: casi particolari

Traslazioni: $\vec{\omega} = 0$.

Il moto rigido conserva le direzioni ed in ogni istante si ha

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(O)\,.$$

In questo caso l'asse istantaneo di moto è indeterminato, come nel caso analogo dell'asse centrale indeterminato quando il risultante è nullo.

Precessioni.

Si chiama moto di precessione (o moto polare) ogni moto rigido con un punto fisso.

Sia O il punto fisso ed $\vec{\omega} \neq 0$, allora la formula fondamentale del corpo rigido diventa

$$\vec{v}(P) = \vec{\omega} \wedge (P - O),$$

e l'asse di istantanea rotazione passa per il punto fisso O. In questo caso le rigate sono due coni (detti *coni di Poinsot*) non necessariamente rotondi, con il vertice comune in O e tangenti fra loro lungo la generatrice che nell'istante considerato coincide con l'asse di moto.

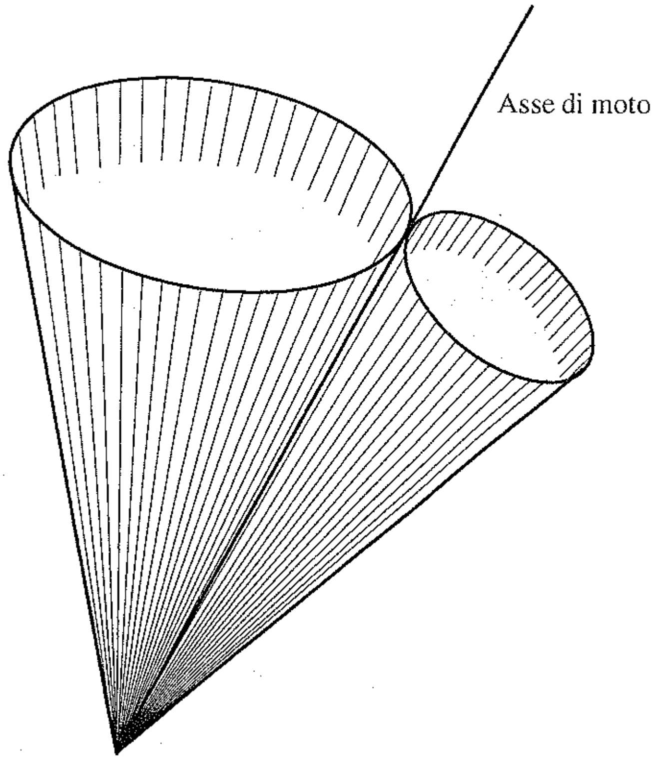


Figura 4.13 Coni di Poinsot

Le precessioni che si ottengono dalla composizione di una rotazione uniforme intorno ad un asse fisso e di una rotazione uniforme intorno ad un asse solidale si dicono *precessioni regolari*; in questo caso i coni sono rotondi.

Rotazioni.

Questo è un caso particolare di precessione con il vettore $\vec{\omega}$ con direzione fissa, ovvero la precessione ha un asse fisso. Un punto P descrive una circonferenza intorno all'asse di $\vec{\omega}$, e per questo motivo $\vec{\omega}$ prende il nome di *velocità di rotazione*. In questo caso i coni di Poinsot degenerano in una retta.

Moti elicoidali.

Si chiama moto elicoidale il moto rigido che ha fisso l'asse di istantanea rotazione, ma l'invariante scalare $\vec{v}(O) \cdot \vec{\omega}$ è diverso da zero. Esempio di moto elicoidale è dato dal moto della vite.

4.9 Moti rigidi piani

Un moto rigido si dice **moto rigido piano** se le caratteristiche del moto $\vec{v}(O)$ e $\vec{\omega}$ sono tali che

1. $\vec{\omega}$ ha direzione costante (nel tempo),
2. $\vec{v}(O) \cdot \vec{\omega} = 0$.

Quindi esiste un versore fisso (o solidale), diciamo $\vec{k}$, tale che $\vec{\omega} \wedge \vec{k} = 0$, ad ogni istante di tempo. La seconda proprietà equivale a richiedere che la velocità di O, e quindi la velocità di ogni altro punto del sistema rigido, sono normali alla direzione $\vec{k}$ dell'asse istantaneo di moto. Si può dimostrare che ogni punto P che inizialmente sta