4.7 Potenziali generalizzati. Lagrangiana di una carica in un campo elettromagnetico

Esistono situazioni in cui è possibile definire una lagrangiana anche se il sistema di forze dipende dalla velocità. Infatti, osservando le [3.18], si può notare che se esiste una funzione $\mathcal{U}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ tale che

$$F^{(a)}_{\Theta,k} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_k}\right), \qquad k = 1, \ldots, \ell, \tag{7.1}$$

l'usuale definizione di lagrangiana $L = T + U$ consente ancora di scrivere le equazioni di Lagrange nella forma [5.9].

La funzione $\mathcal{U}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ è detta *potenziale generalizzato.*

Un esempio molto notevole in cui si può introdurre un potenziale generalizzato è quello della forza applicata a una carica e in un campo elettromagnetico $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ (*forza di Lorentz*):

$$\mathbf{F} = e\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right\}. \tag{7.2}$$

Cerchiamo il potenziale generalizzato per la [7.2], partendo dalle equazioni di Maxwell

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \tag{7.3}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \tag{7.4}$$

Dalla prima segue che è possibile esprimere il campo $\mathbf{B}$ come

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \tag{7.5}$$

dove $\mathbf{A}(x, t)$ è il cosiddetto *potenziale vettore*, definito a meno di un campo irrotazionale (che conveniamo essere indipendente dal tempo).

Grazie alla [7.5], la [7.4] assume la forma

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0. \tag{7.6}$$

Come conseguenza della [7.6] esiste una funzione scalare φ (l'usuale potenziale elettrostatico quando $\mathbf{B}$ è indipendente dal tempo) tale che

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi. \tag{7.7}$$

Introducendo le [7.5] e [7.7] nella [7.2] otteniamo

$$\mathbf{F} = e\left\{-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times \operatorname{rot}\mathbf{A}\right\}. \tag{7.8}$$

Procediamo a una ulteriore trasformazione, notando che

$$(\mathbf{v}\times \operatorname{rot}\mathbf{A})_i = \mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} - \mathbf{v}\cdot\nabla A_i, \qquad i = 1,2,3, \tag{7.9}$$

e che

$$\mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}), \tag{7.10}$$

dove, nello spirito della [7.1] cui vogliamo giungere, iniziamo a riguardare $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$ come variabili indipendenti.

Poichè infine

$$\mathbf{v}\cdot\nabla A_i = \frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial A_i}{\partial t}, \tag{7.11}$$

possiamo scrivere

$$\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{A} = \nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) - \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{7.12}$$

e giungere alla seguente espressione di **F**

$$\mathbf{F} = e\left\{-\nabla\varphi + \frac{1}{c}\nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) - \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\right\}. \tag{7.13}$$

Si riconosce ora facilmente che **F** può esprimersi nella forma[3]

$$\mathbf{F} = -\nabla V + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla_{\mathbf{v}} V \tag{7.14}$$

con

$$V = e\left\{\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\right\} \tag{7.15}$$

e $\nabla_{\mathbf{v}} = \sum_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\mathbf{e}_i$.

Abbiamo dunque ottenuto la lagrangiana della carica e nel campo elettromagnetico $(\mathbf{E},\mathbf{B})$:

$$L = T - e\left\{\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\right\}. \tag{7.16}$$

[3] Secondo la definizione [7.1] il potenziale generalizzato è $U = -V$. Tuttavia in elettrologia è tradizionale l'uso dell'energia potenziale in luogo del potenziale.