PICCOLE OSCILLAZIONI

Introduzione

Un tipo molto diffuso di movimento nei sistemi meccanici è rappresentato dalle cosìdette *piccole oscillazioni* che un sistema compie in prossimità di una sua posizione di equilibrio stabile.

Consideriamo un sistema olonomo S ad n gradi di libertà, a vincoli perfetti (bilaterali), indipendenti dal tempo (o scleronomi) e sottoposto ad una sollecitazione conservativa di potenziale $U = U(q_1, ..., q_n) = U(q)$ ovvero di energia potenziale $V(q_1, ..., q_n) = -U(q_1, ..., q_n)$ dove $(q_1, ..., q_n)$ sono le coordinate lagrangiane che individuano una generica configurazione del sistema; S lo chiameremo, per brevità, *sistema olonomo tipico.*

Supponiamo che l'energia potenziale $V(q_1, ..., q_n)$ *sia minima e nulla* (ovvero il potenziale $U(q_1, ..., q_n)$ *sia massimo e nullo*) quando tutte le variabili q_h si annullano ($q_1 = q_2 = ... = q_n = 0$). Tale posizione è, per il Teorema di Dirichlet-Lagrange, *di equilibrio stabile* per S. Ci proponiamo di studiare le *piccole oscillazioni (o piccole vibrazioni o piccoli moti)* del sistema S attorno alla sudetta posizione di equilibrio stabile. Cominciamo a studiare questi moti dal caso più semplice, quando il sistema ha un solo grado di libertà (detto anche *sistema a vincoli completi*).

1 Piccole oscillazioni di sistemi ad un solo grado di libertà

Nella posizione di equilibrio stabile l'energia potenziale del sistema $V(q)$ è minima per il teorema di Dirichlet-Lagrange; uno spostamento da questa posizione genera una forza $f_q = -\frac{dV}{dq}$ che tende a riportare il sistema nella sua posizione originaria.

Ci proponiamo di dimostrare il seguente:

Teorema 1:

Le piccole oscillazioni di un sistema olonomo "tipico" ad un solo grado di libertà, attorno alla posizione di equilibrio stabile $q^* = 0$, consistono in un moto armonico semplice *governato dall'equazione differenziale*

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0, \tag{1}$$

con frequenza ciclica (o pulsazione) ω e periodo τ costanti, indipendenti dalle condizioni iniziali, ed espressi dalle formule

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(0)}{a(0)}}, \qquad \tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{a(0)}{V''(0)}} \tag{2}$$

dove $V''(0)$ ed $a(0)$ sono rispettivamente la derivata seconda dell'energia potenziale $V(q)$ ed il coefficiente che figura nell'energia cinetica, $T = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2$, calcolati entrambi nella posizione di equilibrio stabile.
L'integrale generale della (1) si può esprimere nella forma

$$q = Acos(\omega t + \alpha) \tag{3}$$

dove A è l'ampiezza delle oscillazioni, l'argomento del coseno $\omega t + \alpha$ è la loro fase, α è il valore iniziale della fase.

Dimostrazione

La posizione del sistema dipende da un solo parametro q che si suppone nullo nella posizione di equilibrio stabile $q^* = 0$. Se fosse $q^* \neq 0$ basterebbe porre $q' = q - q^*$ per ridursi al caso precedente con $q' = 0$.
L'energia cinetica T essendo una funzione omogenea di 2^0 grado nella $\dot{q}$ è della forma

$$T = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 = \frac{1}{2}[a(0) + \frac{q}{1!}a'(0) + \frac{q^2}{2!}a''(0) + ...]\dot{q}^2 \tag{4}$$

dove si è supposto che la funzione $a(q)$ sia sviluppabile in serie di Mac-Laurin. Supponiamo inoltre che il primo termine dello sviluppo sia diverso da zero, cioè $a(0) \neq 0$; allora esso è necessariamente positivo: infatti l'energia cinetica è definita positiva ed inoltre dovendo considerare piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile si ritiene che q e $\dot{q}$ siano abbastanza piccoli e che perció siano trascurabili in (4) i termini dello sviluppo di ordine superiore a 2 in $q, \dot{q}$. Perciò si può porre

$$a(0) = m > 0,$$

che, in generale, non ha il significato di una massa ma puó assumerlo nel caso che il sistema si riduca ad una particella. Avremo

$$T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + T_3(q, \dot{q}), \tag{5}$$

T_3 rappresentando la somma di tutti i termini d'ordine ≥ 3 in $q, \dot{q}$.
Consideriamo ora l'energia potenziale $V(q)$, essa è per ipotesi una funzione di q nulla e minima per $q = 0$, cioè

$$V(0) = 0, \qquad V'(0) = 0, \qquad V''(0) > 0. \tag{6}$$

Se dunque sviluppiamo anche $V(q)$ in serie di Mac-Laurin avremo:

$$V(q) = V(0) + \frac{q}{1!}V'(0) + \frac{q^2}{2!}V''(0) + \frac{q^3}{3!}V'''(0) + \ldots \tag{7}$$

cioè:

$$V(q) = \frac{1}{2}V''(0)q^2 + \ldots.$$

e ponendo $V''(0) = k > 0$, possiamo scrivere

$$V(q) = \frac{1}{2}kq^2 + V_3(q), \tag{8}$$

$V_3(q)$ essendo la somma dei termini d'ordine ≥ 3 in q è ovviamente, per piccoli valori di q, molto piccola rispetto al termine $\frac{1}{2}kq^2$. Per studiare le piccole oscillazioni si possono dunque trascurare i termini T_3 e V_3 nelle (5), (8) e prendere le seguenti forme ridotte dell'energia cinetica e dell'energia potenziale

$$T^* = \frac{1}{2}m\dot{q}^2, \qquad V^* = \frac{1}{2}k\dot{q}^2, \qquad con \quad m > 0, \quad k > 0. \tag{9}$$

La lagrangiana ridotta delle piccole oscillazioni sarà perciò

$$\mathcal{L}^* = T^* - V^*.$$

L'equazione lagrangiana del moto è allora

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial q} = 0 \tag{10}$$

che, tenuto conto delle (9), diventa

$$m\ddot{q} + kq = 0, \tag{11}$$

cioè l'equazione dei moti armonici

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0, \tag{12}$$

avendo posto

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{V''(0)}{a(0)}}.$$

L'equazione differenziale lineare (12) ha due soluzioni indipendenti $cos\omega t$ e $sin\omega t$, perciò il suo integrale generale è

$$q = c_1 cos\omega t + c_2 sin\omega t. \tag{13}$$

Questa soluzione può essere espressa anche nel modo seguente:

$$q = Acos(\omega t + \alpha). \tag{14}$$

Tenuto conto che $cos(\omega t + \alpha) = cos\omega t cos\alpha - sin\omega t sin\alpha$, un confronto con la (13) mostra che le costanti A ed α possono essere espresse per mezzo delle c_1 e c_2 dalle relazioni

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \qquad tan\alpha = -\frac{c_2}{c_1}. \tag{15}$$

Così, intorno ad una posizione di equilibrio stabile il sistema compie un moto oscillatorio armonico. c.d.d

Il coefficiente A davanti al fattore periodico nella (14) si chiama *ampiezza* delle oscillazioni, e l'argomento del coseno la loro *fase*; α è la cosidetta *fase iniziale*, che dipende, evidentemente, dalla scelta dell'origine dei tempi. La grandezza ω è la *frequenza ciclica* delle oscillazioni detta anche *pulsazione*; nella fisica teorica questa grandezza si chiama brevemente *frequenza* mentre nella fisica elementare per *frequenza* si intende generalmente la grandezza $\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi}$, dove $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ è il *periodo* delle piccole oscillazioni.

Le costanti arbitrarie A ed α si determinano conoscendo - in un intorno abbastanza piccolo della posizione di equilibrio stabile - la posizione iniziale q_0 e la velocità iniziale $\dot{q}_0$. La pulsazione ω avendo un significato fisico è evidentemente indipendente dalla scelta del parametro q.

La frequenza è la caratteristica fondamentale delle oscillazioni, indipendente dalle condizioni iniziali del moto; essa è completamente definita dalle proprietà del sistema meccanico come tale. È da notare, però, che questa proprietà della frequenza è dovuta all'ipotesi di piccole oscillazioni e viene meno se si va ad approssimazioni di grado più elevato. Dal punto di vista matematico ciò significa che questa proprietà è connessa alla dipendenza quadratica dell'energia potenziale dalla coordinata lagrangiana q.[1]

L'energia di un sistema che compie piccole oscillazioni è

$$E^* = T^* + V^* = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{m}{2}(\dot{q}^2 + \omega^2 q^2)$$

oppure, sostituendovi la (14):

$$E^* = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2. \tag{16}$$

[1]Essa viene meno se la funzione $V(q)$ ha per $q = 0$, un minimo di ordine più elevato, cioè $V \sim q^n$, $n > 2$.

L'energia è perciò proporzionale al quadrato della frequenza ed al quadrato dell'ampiezza delle oscillazioni.
A volte risulta comodo rappresentare la dipendenza della coordinata lagrangiana dal tempo di un sistema oscillante sotto forma della parte reale di un'espressione complessa. Infatti tenuto conto del teorema di Eulero sugli esponenziali complessi si ha

$$e^{i(\omega t+\alpha)} = cos(\omega t + \alpha) + isin(\omega t + \alpha), \tag{17}$$

perciò la soluzione (14) può essere scritta così

$$q = Re\{Ae^{i(\omega t+\alpha)}\} = Re\{Ae^{i\alpha}e^{i\omega t}\}, \tag{18}$$

e ponendo

$$C = Ae^{i\alpha}, \tag{19}$$

possiamo scrivere la soluzione (14) nella forma

$$q = Re\{Ce^{i\omega t}\}. \tag{20}$$

La costante C è chiamata *ampiezza complessa*, il suo modulo coincide con l'ampiezza ordinaria (reale), ed il suo argomento con la fase iniziale, cioè: $|C| = A$, $argC = \alpha$.
Dal punto di vista matematico è più facile operare con fattori esponenziali anzichè trigonometrici, poichè la derivazione non cambia la loro forma. **Nelle operazioni lineari** (*addizione, sottrazione, moltiplicazione per coefficienti costanti, derivazione, integrazione*), *si può generalmente operare con quantità complesse e prendere la parte reale nel risultato finale del calcolo. Inoltre si può anche trascurare il segno che ha in evidenza la parte reale, riservandosi di fare questo passaggio soltanto nel risultato finale.*