Il problema fondamentale del tiro è quello di determinare l'angolo di proiezione in modo che – per la prefissata v_0 caratteristica del dispositivo di lancio – venga colpito un ben determinato bersaglio situato nel piano di tiro (piano Oxy).

Tale problema è molto complesso a causa dei molti elementi che intervengono nella determinazione della traiettoria e di cui qui non è possibile tener conto. Invece nello schema sino ad ora considerato si presenta come molto semplice e nonostante esso porti a risultati ben diversi da quelli che si hanno nella realtà, vogliamo, a titolo applicativo, trattarlo in breve.

Ci poniamo dunque il seguente problema: disponendo di un dispositivo di lancio situato in un dato posto O e capace di imprimere ad un grave una velocità iniziale di direzione qualsiasi ma modulo, v_0, prefissato, determinare la direzione di lancio (cioè quella di $\mathbf{v}_0$) in modo che la traiettoria del grave passi per un punto prefissato, Q.

Evidentemente $\mathbf{v}_0$ deve appartenere al piano verticale passante per O e Q (che supponiamo, per escludere un caso banale, non appartenente alla verticale per O) e rimane incognito solo l'angolo α di $\mathbf{v}_0$ con l'orizzontale di tale piano. Scegliendo questo come piano xy, manteniamo immutate le notazioni e la scelta degli assi sino ad ora adoperati e denotiamo con $\bar{x}$, $\bar{y}$ le coordinate di Q. Queste dovranno soddisfare all'equazione (11.9). Gli angoli α che risolvono il problema sono dunque tutti e solo quelli che soddisfano alla equazione trigonometrica

$$\bar{y} = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\bar{x}^2 - \operatorname{tg}\alpha\,\bar{x}. \tag{11.12}$$

Posto

$$\lambda = \operatorname{tg}\alpha \tag{11.13}$$

la (10.12) diviene

$$\lambda^2 - \frac{2v_0^2}{g\bar{x}}\lambda + 1 - \frac{2v_0^2}{g}\frac{\bar{y}}{\bar{x}^2} = 0 \tag{11.14}$$

che ammette due radici reali (distinte o coincidenti) allora e soltanto allora che sia

$$\frac{v_0^4}{g^2\bar{x}^2} - \left(1 - \frac{2v_0^2}{g}\frac{\bar{y}}{\bar{x}^2}\right) \geqslant 0. \tag{11.15}$$

La condizione (11.15) equivale a

$$\bar{y} \geqslant \frac{g}{2v_0^2}\bar{x}^2 - \frac{v_0^2}{2g}. \tag{11.16}$$

Si consideri la parabola di equazione

$$y = \frac{g}{2v_0^2}x^2 - \frac{v_0^2}{2g}, \tag{11.17}$$

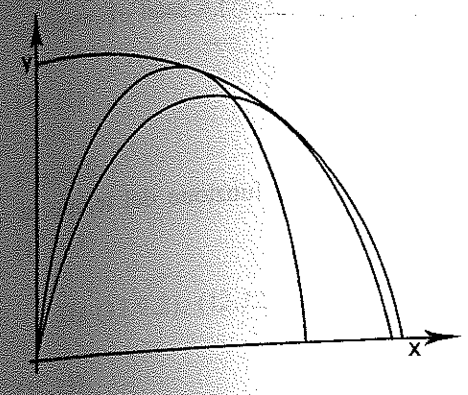

Fig. 4

avente come asse di simmetria quello delle y e la concavità rivolta verso il basso. Si riconosce immediatamente che se Q appartiene alla regione del piano xy al disotto della parabole (11.17), la (11.16) è verificata come disuguaglianza e il problema posto ha due soluzioni, mentre se Q sta sulla parabole (11.17), la (11.16) è soddisfatta come uguaglianza e si ha una sola soluzione. Se invece Q appartiene alla regione situata al di sopra della parabola (11.17), la (11.16) non è verificata e il problema non ammette soluzione. Per tale ragione la parabola di equazione (11.17) prende il nome di *parabola di sicurezza*.

Non è difficile constatare che la parabola di sicurezza è l'inviluppo della famiglia di tutte le traiettorie ottenute variando l'angolo di proiezione e mantenendo fisso il valore di v_0 (Fig. 4).

12. MOTI PIANI

Il moto di un punto si dice piano se la traiettoria è contenuta in un piano. Lo stesso avviene di conseguenza per i vettori velocità e accelerazione.

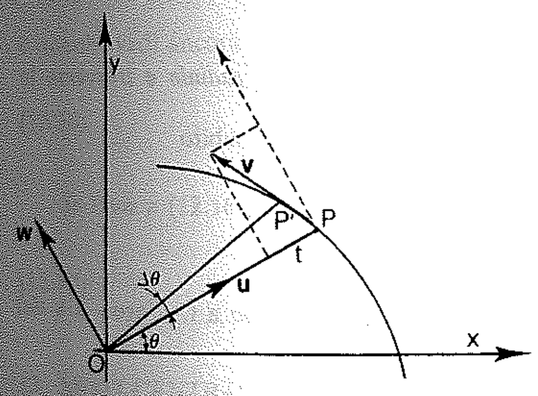

Fig. 5

Si assuma il piano del moto come piano xy e si consideri oltre alla coppia cartesiana Oxy il sistema di coordinate polari di polo O e asse polare Ox. Siano r e θ il raggio vettore e l'anomalia contata positivamente nel verso che porta il semiasse positivo x su quello y mediante una rotazione di $\frac{\pi}{2}$ (Fig. 5).

Evidentemente si ha

$$r = |OP| \tag{12.1}$$

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta. \tag{12.2}$$

Siano **u** il versore di OP e **w** quello ortogonale ad **u**, parallelo al piano Oxy e con verso tale che la coppia (O, $\mathbf{c}_1$), (O, $\mathbf{c}_2$) sia sovrapponibile alla coppia (O, **u**), (O, **w**) mediante la rotazione in verso antiorario dell'angolo θ, se con $\mathbf{c}_1$ e $\mathbf{c}_2$ si denotano i versori di x e y.

Si ha evidentemente

$$\text{(12.3)}\qquad \begin{cases} \mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{c}_1 + \operatorname{sen}\theta\mathbf{c}_2 \\ \mathbf{w} = -\operatorname{sen}\theta\mathbf{c}_1 + \cos\theta\mathbf{c}_2 \end{cases}$$

Da (12.3), pensando che durante il moto di P, θ è funzione del tempo, si deduce

$$\text{(12.4)}\qquad \begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \dot\theta(-\operatorname{sen}\theta\mathbf{c}_1 + \cos\theta\mathbf{c}_2) = \dot\theta\mathbf{w}, \\ \dot{\mathbf{w}} = -\dot\theta(\cos\theta\mathbf{c}_1 + \operatorname{sen}\theta\mathbf{c}_2) = -\dot\theta\mathbf{u}. \end{cases}$$

$\dot\theta$ misura la rapidità con cui varia l'angolo formato dal raggio vettore OP con l'asse delle x. Per tale motivo $\dot\theta$ si suole chiamare *velocità angolare* [scalare].

Da

$$\text{(12.5)}\qquad OP = r\mathbf{u}$$

si ricava, in base a [(8.2), (12.4,1)],

$$\text{(12.6)}\qquad \mathbf{v} = \frac{dr\mathbf{u}}{dt} = \dot r\mathbf{u} + r\dot\theta\mathbf{w}$$

e da questa, tenendo conto di (9.1), (12.4),

$$\text{(12.7)}\qquad \mathbf{a} = (\ddot r - r\dot\theta^2)\,\mathbf{u} + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)\,\mathbf{w}.$$

Si chiamano rispettivamente *velocità* e *accelerazione radiale e trasversa* le componenti di **v** e **a** secondo **u** e **w**.

Indicandole con v_r, a_r e v_θ, a_θ, da (12.6), (12.7), si ha subito

$$\text{(12.8)}\qquad v_r = \dot r, \quad v_\theta = r\dot\theta,$$

$$\text{(12.9)}\qquad a_r = \ddot r - r\dot\theta^2, \quad a_\theta = 2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta.$$

Sia P′ la posizione di P nell'istante t + Δt, *vicinissimo* a t. L'area ΔA del triangolo *piccolissimo* OPP′ (Fig. 5) è espressa da

$$\text{(12.10)}\qquad \Delta A = \frac{1}{2}r^2\,\Delta\theta,$$

se θ + Δθ è l'anomalia di P′.

ΔA si può considerare quale incremento subito dall'area, A, delimitata dal raggio OP, da una retta fissa del piano xy uscente da O – ad es., dall'asse Ox – e da un arco di traiettoria.

La derivata rispetto al tempo, $\dot A$, di tale area si chiama *velocità areale* o *areolare*. In base a (12.10), si ha

$$\text{(12.11)}\qquad \dot A = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}r^2\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

e quindi

$$\text{(12.12)}\qquad \dot A = \frac{1}{2}r^2\dot\theta.$$

Da (12.9,2), (12.12) si riconosce essere

$$\text{(12.13)}\qquad a_\theta = \frac{2}{r}\ddot A,$$

da cui si vede che l'essere il moto piano con velocità areale costante equivale all'essere la sua accelerazione puramente radiale.

Volendo l'espressione della velocità areale in coordinate cartesiane basta tener conto delle (12.2). Da queste, insieme a

$$\text{(12.14)}\qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x},$$

si deduce, derivando rispetto a t,

$$\text{(12.15)}\qquad \frac{\dot\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\dot y x - y\dot x}{x^2}$$

e quindi [vedi ancora (12.2,1)]

$$\text{(12.16)}\qquad \dot\theta = \frac{\dot y x - y\dot x}{r^2}.$$

In base a (12.16), la (12.12) diventa

$$\text{(12.17)}\qquad \dot A = \frac{1}{2}(x\dot y - \dot x y).$$

13. MOTI CENTRALI

Il moto di un punto P *si dice centrale se la sua accelerazione è sempre parallela alla congiungente* P *con un punto fisso.*

Denotando con O tale punto che si chiama *centro del moto*, la circostanza accennata equivale al parallelismo di OP ad **a** (Fig. 6) e si traduce quindi all'equazione

$$\text{(13.1)} \qquad OP \wedge \mathbf{a} = 0,$$

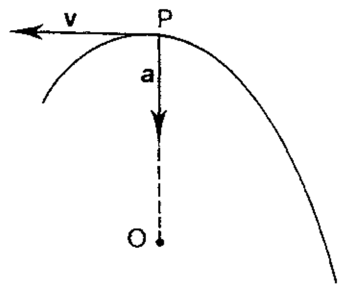

Fig. 6

caratteristica dei moti centrali.

Lo studio di tali moti offre grande interesse per il gran numero di casi in cui essi si presentano in natura. Basta, ad es., pensare al moto dei pianeti intorno al sole o a quello di un elettrone intorno ad un protone. Metteremo in evidenza due proprietà fondamentali.

1) *Ogni moto centrale è piano.* Per dimostrarlo osserviamo che dall'identità

$$\text{(13.2)} \qquad \frac{dOP \wedge \mathbf{v}}{dt} = OP \wedge \mathbf{a}$$

e da (13.1) segue

$$\text{(13.3)} \qquad OP \wedge \mathbf{v} = \mathbf{c},$$

essendo **c** un vettore costante.

Se **c** è nullo insieme al parallelismo di OP a **v** si ha pure quello di **a** a **v**. Di conseguenza l'accelerazione è tangenziale e il moto rettilineo su una retta passante per O (vedi n. 9).

Se invece **c** è diverso da zero il piano di OP e **v** riesce ortogonale alla direzione fissa di **c** e conseguentemente di giacitura invariabile. La traiettoria di P appartiene quindi al piano, π, per O, ortogonale a **c**.

2) *In ogni moto centrale* (che è piano) *la velocità areale rispetto al centro* O *è costante*. Per dimostrarlo osserviamo che riferendo il piano del moto al sistema polare del numero precedente con polo nel centro O, da (12.5), (12.6) segue

$$\text{(13.4)} \qquad OP \wedge \mathbf{v} = r\mathbf{u} \wedge (\dot r\mathbf{u} + r\dot\theta\mathbf{w}) = r^2\dot\theta\,\mathbf{u} \wedge \mathbf{w}.$$

Dato che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$ è costante, dalla invariabilità di $OP \wedge \mathbf{v}$ [vedi (13.3)] si deduce quella di $r^2\dot\theta$ e quindi [vedi (12.12)] di $\dot A$, c.d.d.

Anzi, poiché $\mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$ è unitario e ortogonale al piano del moto, il semplice confronto di (13.3) con (13.4) mostra che *il modulo di* **c** *esprime la grandezza del doppio della velocità areale.*

14. FORMULA DI BINET

Si supponga che il moto di P sia centrale con centro in O e si riferisca il piano del moto ad un sistema di coordinate polari con polo in O, come nel n.

12. La costanza della velocità areale si traduce nell'uguaglianza

$$\text{(14.1)} \qquad r^2\dot\theta = c,$$

ove c esprime il doppio della velocità areale e si chiama *costante delle aree.* Escludendo il caso che il moto di P sia rettilineo, supporremo $c \neq 0$. Durante il moto di P, r si può guardare come una diretta funzione di θ e dipendente dal tempo per suo tramite. Si ha in conseguenza [vedi (14.1)]

$$\text{(14.2)} \qquad \dot r = \frac{dr}{d\theta}\dot\theta = \frac{c}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -c\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}$$

$$\text{(14.3)} \qquad \ddot r = -c\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\dot\theta = -\frac{c^2 d^2\frac{1}{r}}{r^2 d\theta^2}.$$

In base a (14.1) e (14.3) l'espressione (12.9) della accelerazione radiale diviene

$$\text{(14.4)} \qquad a_r = -\frac{c^2}{r^2}\left[\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right]$$

La (14.4) fornisce l'accelerazione radiale [e, quindi, individua il vettore **a**, dato l'annullarsi di a_θ a causa di (12.12), (12.13), (14.1)] in funzione della posizione di P sulla sua traiettoria e si chiama *formula di Binet.*

Tenuto presente che dalle (12.8) segue

$$\text{(14.5)} \qquad v^2 = \dot r^2 + r^2\dot\theta^2,$$

da (14.1), (14.2) si deduce

$$\text{(14.6)} \qquad v^2 = c^2\left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right]$$

15. MOTO CIRCOLARE

Si supponga che P si muova su una circonferenza di centro O e raggio R. La terna di riferimento Oxyz abbia gli assi x, y coincidenti con due suoi diametri ortogonali (Fig. 7). Detto θ l'angolo di OP e x contato positivamente in verso levogiro rispetto a z, è