ossia, eliminando $\dot\theta$ mediante la (62),

$$\dot\varrho = \frac{c}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{d\theta} = -c\,\frac{d\dfrac{1}{\varrho}}{d\theta}.$$

Se, riguardando ancora il secondo membro come una funzione di t composta mediante la θ, deriviamo ulteriormente rispetto a t e poniamo, in base alla (62), $\dot\theta = c/\varrho^2$, otteniamo

$$\ddot\varrho = -\frac{c^2}{\varrho^2}\frac{d^2\dfrac{1}{\varrho}}{d\theta^2},$$

e, sostituendo quest'espressione di $\ddot\varrho$ nella (60) ed eliminando ancora una volta $\dot\theta$ mediante la (62), perveniamo all'annunciata espressione dell'accelerazione radiale

$$a_\varrho = -\frac{c^2}{\varrho^2}\left\{\frac{1}{\varrho} + \frac{d^2\dfrac{1}{\varrho}}{d\theta^2}\right\}, \tag{63}$$

che è nota sotto il nome di *formula del* BINET [1], per quanto fosse nota già prima al NEWTON [2].

53. MOTO KEPLERIANO. — Un moto centrale particolarmente interessante è quello dei pianeti intorno al sole. Tale

[1] JACQUES BINET, n. a Rennes nel 1786, m. a Parigi nel 1856, insegnò Astronomia al Collège de France.

[2] ISAAC NEWTON, n. in un villaggio della Contea di Lincoln nel 1642 (anno della morte del GALILEI), m. in un sobborgo di Londra nel 1727. Qui basti ricordarne i *Philosophiae naturalis principia mathematica*, editi la prima volta in Londra nel 1687, dove sono esposti (nella forma divenuta subito classica) i fondamenti della Meccanica razionale e della Fisica matematica e alcune loro conseguenze grandiose. Per poterle ricavare, il NEWTON si creò da sè lo strumento adatto, cioè in sostanza il Calcolo infinitesimale. Egli divide quindi con BONAVENTURA CAVALIERI e col LEIBNIZ anche il merito della scoperta del Calcolo, spettando però al LEIBNIZ l'espressivo simbolismo dei differenziali, tutt'ora in uso.

Il NEWTON si considera come il maggior genio scientifico che sia esistito mai. Sulla sua tomba, nell'abbazia di Westminster a Londra sta scritto:

Sibi gratulentur Mortales tale tantumque extitisse
Humani Generis Decus.

moto dicesi *kepleriano*, essendo stato KEPLERO [1] il primo che ne enunciò le leggi.

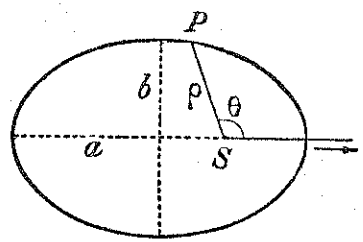
Le *leggi di* KEPLERO sono, come è noto, le seguenti:

1. *Le orbite dei pianeti sono ellissi e il Sole ne occupa uno dei fuochi.*

2. *Le aree descritte dal raggio vettore che va dal Sole a un pianeta, sono proporzionali ai tempi impiegati a percorrerle.*

3. *I quadrati dei tempi impiegati dai vari pianeti a percorrere le loro orbite* (durate delle rivoluzioni) *sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori.*

In virtù della legge 2ª, il moto di ciascuna pianeta è centrale (n. 47) ed ha il Sole per centro.



Determiniamo il valore che compete alla componente a_ϱ dell'accelerazione secondo il raggio vettore.

È noto dalla Geometria analitica che, se si prende il polo in uno dei due fuochi di una ellisse e l'asse polare diretto secondo l'asse maggiore verso il vertice più vicino, e si denota con a il semiasse maggiore, con b il semiasse minore, con e l'eccentricità $\sqrt{1-b^2/a^2}$, con p il parametro b^2/a, si ha

$$\varrho = \frac{p}{1+e\cos\theta}.$$

Di qui si ricava successivamente

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos\theta, \quad \frac{d^2\dfrac{1}{\varrho}}{d\theta^2} = -\frac{e}{p}\cos\theta, \quad \frac{1}{\varrho} + \frac{d^2\dfrac{1}{\varrho}}{d\theta^2} = \frac{1}{p}.$$

La (63) diventa in tal caso

$$a_\varrho = -\frac{c^2}{p}\frac{1}{\varrho^2},$$

[1] JOHANN KEPLER, nato in un villaggio del Würtemberg nel 1571, m. a Ratisbona nel 1630. Fu dapprima assistente e poi successore del danese TYCHO BRAHE, quale matematico ed astronomo della corte imperiale a Praga. Delle celebri tre leggi, le prime due furono pubblicate in *Astronomia nova, sive* etc. (Heidelbergae 1609), e la terza in *Harmonices mundi Libri V*, etc. (Linz 1619).

onde intanto vediamo che l'accelerazione è sempre diretta *verso* il Sole ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza del pianeta da esso.

Inoltre è facile dedurre dalla 3ª legge di KEPLERO che il fattore di proporzionalità

$$\frac{c^2}{p} = \frac{ac^2}{b^2}$$

è lo stesso per tutti i pianeti.

Indicando infatti con T la durata della intera rivoluzione, e ricordando che c è il doppio della velocità areolare, è manifesto che l'area πab dell'orbita ellittica è data anche da $cT/2$. Abbiamo quindi

$$c = \frac{2\pi ab}{T};$$

onde, quadrando e dividendo per $p = b^2/a$, risulta

$$\frac{c^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2};$$

ma per la 3ª legge il rapporto a^3/T^2 è sempre il medesimo qualunque sia il pianeta che si considera; lo stesso può dunque dirsi del rapporto c^2/p.

§ 9. — Moto elicoidale uniforme.

54. Come ultimo esempio di moto di un punto, consideriamo il moto composto (n. 5) di un moto circolare uniforme su di un dato piano π e di un moto rettilineo uniforme lungo una retta perpendicolare a π. Manifestamente si può supporre senza restrizione di generalità, che la traiettoria del moto rettilineo sia la perpendicolare a π del centro O della traiettoria del moto circolare. Supponiamo di contare i tempi dall'istante in cui il punto che descrive codesta perpendicolare di moto uniforme si trova in O; e assumiamo come origine delle coordinate il punto O, come asse z la traiettoria del moto componente rettilineo, orientata nel verso rispetto a cui il moto componente circolare appare destro, e infine, come asse

x positivo, la semiretta che da O va alla posizione occu su π dal punto P_1, che si muove di moto circolare unifo nell'istante $t = 0$, cioè nell'istante in cui il punto P_z, descrive l'asse delle z di moto uniforme, passa per O. L' orientato y risulta univocamente determinato dalla solita dizione che la terna $Oxyz$ sia destra.

Ciò posto, siano r ed ω il raggio della traiettoria di P_1 rispettiva velocità angolare (*costante*); sia V il valore asso della velocità (pur essa *costante*) del moto rettilineo di P_z

Le equazioni del moto circolare uniforme del punto P_1 quanto si sono scelte l'origine dei tempi e la terna di rif mento in modo che, nell'istante $t = 0$, P_1 assuma nel pi xy la posizione di coordinate r, 0, saranno date, pel n. 33,

$$x = r\cos\omega t, \quad y = r\sin\omega t;$$

mentre il moto uniforme P_z sull'asse z, in quanto P_z per t deve trovarsi in O, ammetterà l'equazione

$$z = \pm Vt,$$

dove andrà preso il segno + o —, secondochè, rispetto senso positivo fissato sull'asse z, il dato moto rettilineo di risulta progressivo o retrogrado.

Componendo i due moti di P_1 e P_z, avremo pel *moto co posto* le equazioni

$$x = r\cos\omega t, \quad y = r\sin\omega t, \quad z = \pm Vt. \tag{64}$$

Quadrando e sommando le due prime, si trova

$$x^2 + y^2 = r^2; \tag{65}$$

onde si conferma la circostanza ben evidente a priori che punto P, animato del moto (64), si muove sulla superfic cilindrica di rotazione, di asse z e raggio r.

La velocità v di P ha le componenti

$$\dot{x} = -r\omega\sin\omega t, \quad \dot{y} = r\omega\cos\omega t, \quad \dot{z} = \pm V,$$

e quindi l'intensità

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{r^2\omega^2 + V^2},$$

la quale risulta *costante*, talchè il *moto composto* (64) è *uniform* al pari dei moti componenti.