Trasformata di Legendre

Abbiamo già visto che sotto l'ipotesi
~~Al fine di capire meglio meglio perché dove ricerca l'ipotesi~~

$$\left|\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}\right| \neq 0 \qquad (\mathcal{L} \text{ lagrangiana}, \ \mathcal{L}=\mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}; t)) \qquad \begin{cases} \underline{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\dot{q}}} \\ \dot{\underline{p}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{q}} \end{cases}$$

si è potuto introdurre una funzione hamiltoniana

$$H(\underline{p}, \underline{q}; t) = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}; t)\right]_{\underline{\dot{q}} = \underline{\dot{q}}(\underline{p}, \underline{q}, t)}$$

$\underline{p} = (p_1, \dots, p_n)$

$\underline{q} = (q_1, \dots q_n)$

e le equazioni di moto hanno assunto la forma

$$\begin{cases} \dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \\ \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \end{cases} \qquad (h = 1, \dots, n)$$

la matrice è infatti la matrice cinetica $a_{hk} = \sum_{i=1} m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k}$

Se $\mathcal{L} = T + U$ l'ipotesi $\left|\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}\right| \neq 0$ è certamente soddisfatta,

per lagrangiane più generali è necessario imporre questa condizione in modo da poter ricavare le $\dot{q}_h$ dalla relazione (definizione)

$$p_h = \frac{\partial \mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)}{\partial \dot{q}_h}$$

in modo che si abbia

$$\boxed{\underline{\dot{q}} = \underline{\dot{q}}(\underline{p}, \underline{q}, t)}$$

~~Si dice che si è~~

Il procedimento seguito la volta scorsa si può sintetizzare dicendo che si è operata una <u>trasformata di Legendre</u> sulla lagrangiana $\mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$ e che il risultato di questa operazione è la funzione Hamiltoniana $H(\underline{p}, \underline{q}, t)$.

Cerchiamo di capire meglio cosa ~~debba sistema~~ è una trasformata di Legendre.

Conviene, al fine di mettere in luce, l'analogia con la meccanica, considerare una funzione di due variabili $f(x,y)$.

Introducendo una nuova variabile $\boxed{u = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}$ ① ,

si cerca di passare dalle variabili (x,y) alle variabili (u,y).

Questo richiede che x possa esprimersi come $\boxed{x = x(u,y)}$ e questo è possibile solo se dalla ① sono in grado di ricavare x in funzione di u e y. Questo fatto è possibile se u è una funzione monotona (come funzione di x), ovvero $\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \neq 0}$.

Se questa condizione è soddisfatta allora si può introdurre la trasformata di Legendre nel seguente modo:

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \underset{\text{per la 1)}}{=} u\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy}$$ ②

Poiché $d(ux) = x\,du + u\,dx$ si ha $u\,dx = d(ux) - x\,du$

Quindi la ② fornisce

$$d(f - ux) = -x\,du + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Si definisce ~~la~~ trasformata di Legendre di f la funzione

g ~~così definita in modo che il suo differenziale~~

~~soddisfi la seguente relazione~~

$$\cancel{dg = -x\,du + \frac{\partial f}{\partial y}dy}$$

$\triangleright\ g = $

definito nel seguente modo

$$\boxed{g(u,y) = \left(-f(x,y) + ux\right)\Big|_{x=x(u,y)}} \quad (\nabla)$$

~~$g(u,y) = \left(-f(x,y) + ux\right)\Big|_{x=x(u,y)}$~~

e il differenziale di g soddisfa la relazione

$$\boxed{dg = x\,du - \frac{\partial f}{\partial y}\,dy}$$

Come si ricollega questa operazione con quanto mostrato la volta scorsa?

Se identifichiamo f con $\mathcal{L}$, x ~~p~~ con $\dot q$ e y con q e H con g e p con u

si trova che la trasformata di Legendre di $\mathcal{L}(\dot q, q)$,

~~H~~ H cioè eseguendo nella definizione (∇)

le sostituzioni

$$\begin{array}{l} x \to \dot q \\ y \to q \\ f \to \mathcal{L} \\ g \to H \\ u \to p \end{array} \quad (*)$$

si ottiene

$$H(p,q) = \left(p\dot q - \mathcal{L}(\dot q, q)\right)\Big|_{\dot q = \dot q(p,q)}$$

ovvero l'hamiltoniana!! Si noti come la trasformata di Legendre si possa ~~ssa~~ effettuare solo se la relazione $(\heartsuit)$ è verificata. Effettuando le sostituzioni $(*)$ la $(\heartsuit)$ ~~dive~~ si legge come

$$\boxed{\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot q^2} \neq 0}$$

Nel caso di funzioni più variabili la definizione diventa una semplice generalizzazione:
Sotto la condizione $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right| \neq 0$
la trasformata di Legendre di f è la funzione g così definita

$$\boxed{g(\underline{u}, y) = \left(\underline{u}\cdot\underline{x} - f(\underline{x}, y)\right)\Big|_{\underline{x} = \underline{x}(\underline{u}, y)}} \quad (\nabla)$$

L'equivalenza con il caso meccanico ~~[illegible]~~ da noi trattato è ora evidente.

Un risultato certamente interessante è il seguente

Teorema) La funzione $g(\underline{u}, y)$ definita dalla (∇) ammette a sua volta una trasformata di Legendre la quale coincide con la funzione di partenza $f(\underline{x}, y)$.

Da un punto di vista della Meccanica questo significa che se applico alla trasformata di Legendre a $H(p, q)$ ritrovo la lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q})$!

La verifica del teorema è semplice. Ragioniamo nel caso $n = 2$. La generalizzazione è immediata al caso di più dimensioni.
Per prima cosa basta osservare che $g = g(u, y)$ e quindi

$$\boxed{dg = \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial y} dy} \quad 4)$$

Il confronto fra 3) e 4) porge

$$\frac{\partial g}{\partial u} = x \quad e \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}$$

Quindi se volessi passare alle variabili (x,y) dovrei esprimere $u=u(x,y)$ e questo si può fare se $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \neq 0$

$$\cancel{[ux - g(u,y)]_{|u=u(x,y)} = f(x,y)}$$

Ma $\frac{\partial g}{\partial u} = x$ $\cancel{\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = u \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}}$ $\cancel{x = x(u,y)}$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) = \frac{\partial x}{\partial u}$$ la chain rule offre $$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial x}{\partial u} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^{-1} \neq 0}$$

Definisco quindi la trasformata di Legendre come la funzione h t.c.

$$h(x,y) = \left(xu - g(u,y)\right)_{|u=u(x,y)} = \left(xu - xu + f(x,y)\right) = f(x,y)$$ ∎

f