Limitandoci al caso di una funzione di due variabili, si ha:

Se D è un dominio del piano xy la cui intersezione con ogni retta parallela all'asse x è costituita al più da un unico segmento, ogni funzione $f(x, y)$, definita e continua in D e avente derivata parziale prima rispetto ad x identicamente nulla, allora la funzione non dipende dalla x.

Infatti, per ogni fissato y la funzione $f(x, y)$ risulta una funzione della sola x che, essendo definita in un unico intervallo e avendo ivi derivata nulla, è certo una costante, cioè non varia al variare della x.

Si osservi però che il teorema può cadere in difetto se il dominio D è supposto soltanto internamente connesso.

Così, per esempio, se D è la corona circolare limitata dalle due circonferenze con centro l'origine e raggi $r < R$, una retta orizzontale di equazione $y = y_0$, con $y_0 < r$, interseca D lungo due segmenti su ciascuno dei quali la funzione $f(x, y)$ risulta costante; non è però lecito affermare che sui due segmenti la $f(x, y)$ assume lo stesso valore.

2.— Funzioni omogenee.

Sia $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una funzione di n variabili definita in un insieme E. Supporremo che tale insieme E abbia la proprietà che, se $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è un qualsivoglia punto contenuto in esso e diverso dall'origine, tale risulta anche il punto di coordinate $(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)$, qualunque sia il numero positivo t. In altre parole, si può dire che l'insieme E è costituito da tante semirette spiccate dall'origine, l'origine potendo poi appartenere o non appartenere ad E.

Premesso ciò, si dà la seguente:

Definizione.— La funzione $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dicesi positivamente omogenea di grado α, essendo α un numero reale, se per ogni punto $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di E e per ogni valore positivo della variabile t, risulta:

$$(1) \qquad f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^{\alpha} \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n) \; .$$

Si osservi che se l'origine appartiene ad E ed è $\alpha \neq 0$, la (1), dove le x_i si pongono tutte eguali a zero, fornirà $f(0, 0, \dots, 0) = 0$ sicchè l'origine sarà un punto di continuità per la $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ soltanto per $\alpha > 0$, a meno che la funzione non si riduca ad una costante.

Supponiamo ora, in più, che l'insieme E sia simmetrico rispetto all'origine di S_n, cioè che se il punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sta in E anche il punto $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ sta pure in E, e supponiamo anche che α sia un <u>numero intero</u>.

Se in queste ipotesi vale identicamente la (1) sia per $t > 0$ che per $t < 0$, qualunque sia il punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ di E, allora la $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dicesi <u>omogenea di grado α in E</u>.

ESEMPI.

<u>La funzione</u> :

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + xy + y^2} \; ,$$

<u>ove il radicale va inteso in senso aritmetico, è positivamente omogenea di grado $\alpha = 1$</u>.

Infatti, per $t > 0$, si ha:

$$f(tx, ty) = \sqrt{(tx)^2 + (tx)(ty) + (ty)^2} = \sqrt{t^2(x^2 + xy + y^2)} = t\sqrt{x^2 + xy + y^2} = t \cdot f(x, y) \, .$$

Si osservi però che la funzione data non è omogenea perchè l'eguaglianza:

$$\sqrt{t^2x^2 + t^2xy + t^2y^2} = t\sqrt{x^2 + xy + y^2} \; ,$$

sussiste solo per $t > 0$.

<u>La funzione</u> :

$$f(x, y, z) = 5x^2 - 2yz + 7xy + z^2 \; ,$$

<u>è omogenea di grado 2</u>.

Infatti, sia per $t > 0$ che per $t < 0$ si ha:

$$f(tx, ty, tz) = 5t^2x^2 - 2t^2yz + 7t^2xy + t^2z^2 = t^2 \cdot f(x, y, z) \; .$$

Vogliamo ora dimostrare il seguente:

TEOREMA DI EULERO. — <u>Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione</u> $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, <u>continua con le sue derivate prime nell'insieme</u> E, <u>sia ivi positivamente omogenea di grado α, è che sia identicamente verificata la relazione</u>:

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot x_n = \alpha \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n) ,$$

ossia la somma delle derivate parziali prime moltiplicate per le rispettive variabili di derivazione sia eguale alla funzione moltiplicata per il suo grado di omogeneità.

Dimostrazione.— Che la condizione sia necessaria si dimostra subito derivando la (1) rispetto a t, con la regola della derivazione delle funzioni composte, e ponendo poi $t=1$.

Per dimostrare la sufficienza osserviamo che se la (2) è verificata identicamente in E, si ha anche, sostituendo nella (2), $(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)$ al posto di $(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$f'_{x_1}(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)\cdot(tx_1) + f'_{x_2}(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)\cdot(tx_2) + \cdots\cdots +$$
$$+ f'_{x_n}(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)\cdot(tx_n) = \alpha\cdot f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) .$$

E moltiplicando tale relazione per $t^{-\alpha-1}$, si ha:

$$\left[f'_{x_1}(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)\cdot x_1 + \cdots\cdots + f'_{x_n}(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)\cdot x_n\right] t^{-\alpha} -$$
$$- \alpha\cdot t^{-\alpha-1}\cdot f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = 0 ,$$

che si può scrivere sotto la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[t^{-\alpha}\cdot f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)\right] \doteq 0 .$$

Quest'ultima relazione prova che la funzione:

$$t^{-\alpha}\cdot f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) ,$$

è costante rispetto a t e quindi eguale, per esempio, al valore che essa assume per $t=1$. Si ha perciò:

$$t^{-\alpha}\cdot f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) ,$$

ossia:

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^{\alpha}\cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n) ,$$

e ciò prova che la $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è positivamente omogenea di grado α.

Dimostriamo ora che:

Se la funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, positivamente omogenea di grado α, è continua e parzialmente derivabile in E con derivate parziali prime continue, le sue derivate parziali prime sono funzioni positivamente omogenee di grado $\alpha - 1$.

Infatti, dalla (1), derivando parzialmente ambo i membri rispetto ad x_i, risulta:

$$f'_{x_i}(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) \cdot t = t^{\alpha} \cdot f'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) \ ,$$

da cui:

$$f'_{x_i}(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^{\alpha - 1} \cdot f'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) \ ,$$

il che prova la tesi.

Poichè una funzione omogenea di grado α è anche positivamente omogenea si ha che:

Condizione necessaria affinchè una funzione continua con le sue derivate prime sia omogenea di grado α è che sia soddisfatta la (2).

La stessa condizione (2) non è però sufficiente per l'omogeneità.

3. — Formula di Taylor per le funzioni di più variabili.

Vogliamo estendere alle funzioni di più variabili la formula di Taylor che abbiamo già stabilita per le funzioni di una variabile [1], e incominciamo dalle funzioni di due variabili.

Sia $f(x, y)$ una funzione definita in un campo A e ivi continua assieme a tutte le sue derivate parziali dei primi n ordini. Fissato nel campo A un punto $P_0(x_0, y_0)$, sia $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ un altro punto dello stesso campo tale che il segmento $P_0 P$ stia interamente in A. Le equazioni parametriche della retta $P_0 P$, come è noto, sono:

$$x = x_0 + t \cdot \Delta x \quad , \quad y = y_0 + t \cdot \Delta y \ , \tag{3}$$

ove il parametro t varia su tutto l'asse reale.

Facendo invece variare t nell'intervallo $0 \vdash\!\dashv 1$, dalla (3)

---

[1] Si veda: G. Zwirner «Lezioni di Analisi matematica», Parte 1ª, Cap. XI, n. 7.