

Si vede che  $\vartheta(\lambda) = \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi(\lambda) = c_1 \lambda$  soddisfa sia le equazioni (27) che le condizioni iniziali (26). Per il teorema di esistenza ed unicità, essa è pertanto la soluzione. Ma per  $\vartheta(\lambda) = \frac{\pi}{2}$ , si trova una circonferenza massima. Pertanto, le geodetiche della superficie sferica sono le circonferenze massime, ovvero intersezioni della superficie sferica con piani passanti per il suo centro.

#### MOTO SPONTANEO:

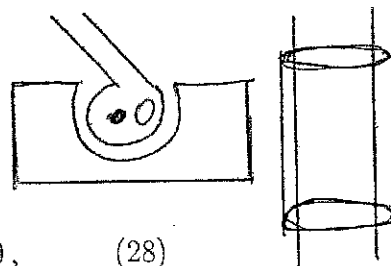
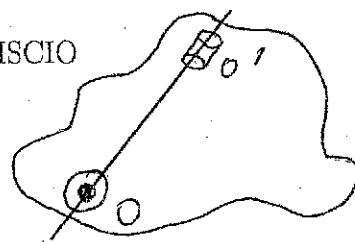
È il moto di un punto vincolato ad una superficie liscia e fissa in assenza di forze attive. Sappiamo che l'equazione (23)<sub>2</sub> è equivalente a

$$m\ddot{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial u_i} = \vec{F}^a \cdot \frac{\partial P}{\partial u_i};$$

poichè  $\vec{F}^a = 0$ , si ha  $\ddot{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial u_i} = 0$ , cioè la (25)<sub>1</sub>. Pertanto, il moto spontaneo avviene su una geodetica; grazie alla (25)<sub>2</sub> si ha anche  $|\dot{v}|$  costante, cioè la geodetica viene percorsa con moto uniforme.

#### CORPO RIGIDO CON ASSE FISSO E LISCIO

L'asse fisso può essere realizzato mediante due cerniere, una sferica in  $O$  ed una cilindrica in  $O'$ . Una cerniera sferica è costituita da una cerniera cava fissa dentro alla quale può muoversi una sfera solidale al corpo; perciò realizza un punto fisso. Una cerniera cilindrica è costituita da un cilindretto cavo dentro al quale può ruotare e scorrere un asse solidale al corpo. Poichè il vincolo è liscio, esso può esercitare tutte le reazioni vincolari con



$$Q_h^v = 0, \quad \text{cioè} \quad \vec{R}^v \cdot \frac{\partial O}{\partial q_h} + \vec{M}_O^v \cdot \vec{\omega}_h = 0, \quad (28)$$

dove  $h = 1$  giacchè abbiamo un sol parametro lagrangiano  $\vartheta$  definito come segue: chiamando  $\vec{k}$  il versore dell'asse fisso,  $\vartheta$  è l'angolo di cui deve ruotare un piano fisso per sovrapporsi ad un piano solidale, entrambi i piani passanti per l'asse fisso, nel verso positivo delle rotazioni visto da  $\vec{k}$ ; si ha poi  $\vec{\omega} = \dot{\vartheta} \vec{k}$ . Poichè  $\vec{\omega}_h$  è definito da  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_h \dot{q}_h$  ne segue  $\vec{\omega}_1 = \vec{k}$ . Da questa, e dal fatto

che  $O$  è fisso, segue che la  $(28)_2$  diviene  $\vec{M}_O^v \cdot \vec{k} = 0$ , cioè le reazioni vincolari hanno momento assiale nullo.

Ci chiediamo se esiste un vettore  $\vec{\phi}_{O'}^v$  tale che il sistema delle forze vincolari sia equivalente a

$$(\vec{R}^v - \vec{\phi}_{O'}^v, O) \quad , \quad (\vec{\phi}_{O'}^v, O')$$

ovviamente il risultante è lo stesso. Perchè anche il momento con polo  $O$  sia lo stesso, occorre e basta che

$$(O' - O) \wedge \vec{\phi}_{O'}^v = \vec{M}_O^v$$

che è un'equazione vettoriale nell'incognita  $\vec{\phi}_{O'}^v$ ; la C.N.S. perchè essa abbia soluzione è  $(O - O') \cdot \vec{M}_O^v = 0$  ed è soddisfatta come conseguenza di  $\vec{M}_O^v \cdot \vec{k} = 0$  e del fatto che  $O - O'$  è parallelo a  $\vec{k}$ . Pertanto l'equazione vettoriale ha certamente soluzione, anzi ne ha una che è anche ortogonale sia ad  $\vec{M}_O^v$  che ad  $O' - O$ , cioè a  $\vec{k}$ . Posto  $\vec{\phi}_{O'}^v = \vec{R}^v - \vec{\phi}_{O'}^v$ , ho così trovato che il sistema delle reazioni vincolari è equivalente ad un vettore  $(\vec{\phi}_{O'}^v, O)$  e ad un vettore  $(\vec{\phi}_{O'}^v, O')$  con  $\vec{\phi}_{O'}^v \cdot \vec{k} = 0$ .

Con questo le  $(11)_3$  di pag. 76 degli appunti di Meccanica 1 sono soddisfatte. Per valutare le  $(11)_2$  ci mettiamo in un riferimento solidale avente l'asse fisso come asse  $z$  e teniamo conto delle equazioni

$$\vec{K}_O = \begin{pmatrix} A & -C' & -B' \\ -C' & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix}, \quad \frac{d_a}{dt} \vec{K}_O = \frac{d_r}{dt} \vec{K}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{K}_O =$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & -C' & -B' \\ -C' & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\vartheta} \\ -B'\dot{\vartheta} & -A'\dot{\vartheta} & C\dot{\vartheta} \end{vmatrix},$$

già dimostrate in Meccanica 1. Dopo ciò le  $(11)_{1,2}$  divengono

$$\begin{cases} m\vec{a}_G = \vec{R}^{ea} + \vec{\phi}_O^v + \vec{\phi}_{O'}^v \\ -B'\dot{\vartheta} + A'\dot{\vartheta}^2 = M_{Ox}^{ea} - \phi_{O'y}^v d \\ -A'\dot{\vartheta} - B'\dot{\vartheta}^2 = M_{Oy}^{ea} + \phi_{O'x}^v d \\ C\ddot{\vartheta} = M^a(\vartheta, \dot{\vartheta}, \ddot{\vartheta}) \end{cases} \quad (29)$$

dove abbiamo indicato con  $d$  la distanza tra  $O$  ed  $O'$  e posto  $M^a = M_{Oz}^{ea}$  in quanto si tratta proprio del momento assiale delle forze esterne attive.

23

La  $(11)_1$  è la prima equazione cardinale  $m\vec{e}_G = \vec{R}^{ea} + \vec{\phi}_O^v + \vec{\phi}_{O'}^v$

$Q_{z_1}^v = 0$

si tratta delle seconde equazione cardinale

$$\frac{d}{dt} K_O = M_O^{ea} + \underline{1}_O^{ev}$$

dove si è tenuto conto che, per come si è scelto il riferimento,  $O$  è un punto fisso dell'asse e quindi  $\underline{v}_O = \underline{0}$  e  $Q = 0$

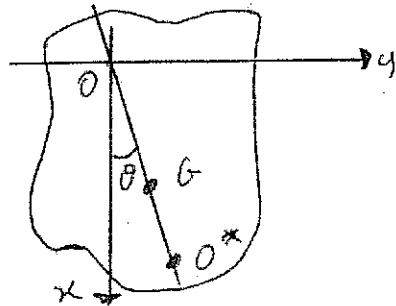
L'ultima delle equazioni (29) è un'equazione pura, da cui ricavo  $\vartheta = \vartheta(t)$ ; dopo ciò le (29)<sub>2,3</sub> danno  $\phi_{O'x}^v$  e  $\phi_{O'y}^v$ , cioè tutto  $\vec{\phi}_{O'}^v$ . Infine, la (29)<sub>1</sub> ci dà  $\vec{\phi}_O^v$ . Le (29) nel caso statico diventano

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{R}^{ea} + \vec{\phi}_O^v + \vec{\phi}_{O'}^v & 0 &= M_{Ox}^{ea} - \phi_{O'y}^v d \\ 0 &= M_{Oy}^{ea} + \phi_{O'x}^v d & 0 &= M^a(\vartheta, 0, \vec{\phi}_O^v) \end{aligned}$$

L'ultima d'esse è la condizione di equilibrio per un corpo rigido con asse fisso e liscio. Se vogliamo che le reazioni vincolari dinamiche nelle (29) siano uguali a quelle statiche, è sufficiente che il baricentro stia sull'asse fisso (in modo che  $\vec{a}_G = \vec{0}$ ) e che l'asse fisso sia principale d'inerzia (in modo che  $A' = B' = 0$ ). Questo torna utile per la progettazione e costruzione di simili dispositivi.

#### Pendolo composto:

È un corpo rigido con asse fisso e liscio orizzontale, col baricentro al di fuori di tale asse e soggetto soltanto ad una forza attiva, la forza peso. In figura è disegnata la sezione col piano passante per  $G$  ed ortogonale all'asse fisso.  $O$  è stato scelto su tale piano. Il piano fisso e quello solidale che individuano  $\vartheta$  sono stati presi, rispettivamente, quello verticale e quello passante per  $G$ . L'asse  $x$  è stato preso verticale discendente. Poichè, posto  $\overline{GO} = d$ , si ha



$$M^a = (G - O) \wedge m\vec{g} \cdot \vec{k} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ d \cos \vartheta & d \sin \vartheta & 0 \\ mg & 0 & 0 \end{vmatrix} = -mgd \sin \vartheta$$

l'equazione (29)<sub>4</sub> diviene

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{mgd}{C} \sin \vartheta.$$

Confrontando questa con l'equazione del pendolo semplice,  $\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l} \sin \vartheta$ , si vede che il pendolo composto si muove come un pendolo semplice di lunghezza

$$l = \frac{C}{md} ; \quad (30)$$

$l$  viene chiamata "lunghezza ridotta del pendolo composto". Grazie al teorema di Hyghens, si ha

$$l = \frac{I_G}{md} + d > d ; \quad (31)$$

si consideri il punto  $O^*$  distante  $l$  da  $O$  e tale che  $G$  sia interno al segmento  $OO^*$ . La retta passante per  $O^*$  e parallela all'asse fisso viene chiamata "asse di oscillazione"; l'asse fisso viene anche chiamato "asse di sospensione". Che succede se stacco il corpo rigido dal suo asse fisso e rendo fisso il suo precedente asse di oscillazione? Ovviamente, ottengo un altro pendolo composto; per trovare la sua lunghezza ridotta posso ancora usare la (30) con  $l^*$  al posto di  $l$  e con  $l - d$  al posto di  $d$ , in quanto la distanza di  $G$  da  $O^*$  è proprio  $l - d$ . Perciò si ha

$$l^* = \frac{C^*}{m(l-d)} = \frac{I_G}{m(l-d)} + l - d = l,$$

dove, nell'ultimo passaggio ho sostituito il valore di  $I_G$  che si ricava dalla (31). Poichè  $l^* = l$ , il nuovo asse di oscillazione è il vecchio asse di sospensione; questo fatto viene chiamato proprietà di reversibilità del pendolo composto: Il pendolo composto si muove allo stesso modo se si scambia l'asse di sospensione con quello di oscillazione.

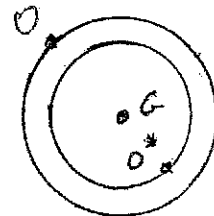
Vediamo se ci sono altre rette che godono di questa proprietà. Poichè in definitiva  $l$  dipende dalla distanza dell'asse di sospensione da  $G$ , cerco  $d'$  tale che

$$l = \frac{I_G}{md'} + d'; \quad \text{ma} \quad l = \frac{I_G}{md} + d.$$

Uso quest'ultima per ricavare  $I_G$  che poi sostituisco nella precedente e trovo

$$l = \frac{md(l-d)}{md'} + d', \quad \text{ovvero} \quad (d')^2 - ld' + d(l-d) = 0, \quad \text{da cui} \quad d' = \begin{cases} d \\ \text{oppure} \\ l-d. \end{cases}$$

Posso perciò considerare il cilindro formato dalla rotazione dell'asse fisso attorno alla retta parallela ad esso e passante per  $G$ , ed il cilindro formato dalla rotazione dell'asse di sospensione attorno alla stessa retta; orbene, il pendolo composto



si muove allo stesso modo se si prende come asse di sospensione una qualunque retta di ognuno dei due cilindri. Ovviamente, di queste rette nel piano passante per  $G$  e per l'asse fisso ce ne sono 4: l'asse di sospensione, l'asse di oscillazione ed i loro simmetrici rispetto a  $G$ .

### IL CORPO RIGIDO CON PUNTO FISSO E LISCIO

Il punto fisso  $O$  può essere realizzato con una cerniera sferica liscia. Questa può esercitare tutte le reazioni vincolari con

$$Q_h^v = 0, \quad \text{cioè} \quad \vec{R}^v \cdot \frac{\partial O}{\partial q_h} + \vec{M}_O^v \cdot \vec{\omega}_h = 0;$$

poichè  $O$  è fisso ed  $\vec{\omega}_h$  qualunque, ne segue  $\vec{M}_O^v = \vec{0}$ , cioè il sistema delle forze vincolari è equivalente al loro risultante  $\vec{\phi}^v$  applicato nel punto fisso.

Con questo le (11)<sub>3</sub> di pag. 76 degli appunti di Meccanica 1 sono soddisfatte. Determineremo il moto dalle (11)<sub>2</sub>, dopo di che le (11)<sub>1</sub> ci danno  $\vec{\phi}^v$ .

Per valutare le (11)<sub>2</sub> ci mettiamo in un riferimento solidale (in modo che la matrice d'inerzia sia costante) e, per di più, principale d'inerzia. Chiamiamo  $p, q, r$  le componenti della velocità angolare in tale riferimento e teniamo conto di

$$\vec{K}_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \quad \frac{d_a}{dt} \vec{K}_O = \frac{d_r}{dt} \vec{K}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{K}_O =$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{vmatrix},$$

già dimostrate in Meccanica 1. Dopo ciò le (11)<sub>2</sub> proiettate lungo gli assi divengono

$$\begin{cases} Ap - (B - C)qr = M_x^a \\ Bp - (C - A)pr = M_y^a \\ Cp - (A - B)pq = M_z^a \end{cases},$$

note sotto il nome di "Equazioni di Eulero".

In esse possiamo sostituire le espressioni di  $p, q, r$  in funzione degli angoli di Eulero  $\vartheta, \varphi, \psi$  e delle loro derivate prime; si ottiene così un sistema di 3

equazioni del secondo ordine per  $\vartheta, \varphi, \psi$  di tipo normale (perchè la matrice dei coefficienti di  $\dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$  coincide con quella di  $\vartheta, \varphi, \psi$  che si trova nelle relazioni che legano  $p, q, r$  appunto a  $\dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$ ). Alternativamente, si possono ricavare  $\dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$  in funzione di  $p, q, r, \vartheta, \varphi, \psi$  che, aggiunte alle equazioni di Eulero, danno un sistema di 6 equazioni del primo ordine di tipo normale per le incognite  $p, q, r, \vartheta, \varphi, \psi$ .

Moti per inerzia: Sono quelli che si ottengono quando le forze attive hanno momento  $\vec{M}_O^a = \vec{0}$ . In tal caso, le equazioni di Eulero divengono

$$Ap - (B - C)qr = 0, B\dot{q} - (C - A)pr = 0, C\dot{r} - (A - B)pq = 0. \quad (32)$$

Si vede che il problema della loro integrazione è riconducibile alle quadrature; infatti, moltiplicando le (32) rispettivamente per  $p, q, r$  e sommando, si trova  $App + Bq\dot{q} + Crr = 0$ , da cui l'integrale primo

$$\frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = T_0 = \text{costante}.$$

Similmente, moltiplicando le (32) rispettivamente per  $Ap, Bq, Cr$  e sommando, si trova

$$(A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2) = |\vec{K}_0|^2 = \text{costante}.$$

Se  $A \neq B$ , da questi 2 integrali primi posso ricavare  $p$  e  $q$  e sostituirli nella (32)<sub>3</sub> che diviene a variabili separabili e, quindi, può essere risolta a meno del calcolo di un integrale indefinito. Per lo meno, si può fare una discussione di Weierstrass. Ma non addentriamoci in questo argomento. Vediamo invece di trovare soluzioni particolari della (32).

Rotazioni permanenti: Sono le eventuali soluzioni delle (32) con  $\vec{\omega}$  costante; poichè  $\frac{d_a}{dt}\vec{\omega} = \frac{d_r}{dt}\vec{\omega} + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} = \frac{d_r}{dt}\vec{\omega}$ , se  $\vec{\omega}$  è costante nel riferimento assoluto, lo è anche in quello solidale e viceversa. Le (32) ci dicono poi che

$$(B - C)qr = 0, (C - A)pr = 0, (A - B)pq = 0. \quad (33)$$

Ne ricaveremo ora che "Le rotazioni permanenti sono tutte e sole quelle che avvengono attorno ad assi principali d'inerzia". Per provarlo, distinguiamo 3 casi:

Caso 1:  $A \neq B \neq C \neq A$ ,

Le (33) diventano  $qr = 0, pr = 0, pq = 0$ .

- Se  $p \neq 0 \Rightarrow q = r = 0$ , cioè rotazione attorno all'asse delle  $x$  che è principale d'inerzia.
- Se  $p = 0, q \neq 0 \Rightarrow r = 0$ , cioè rotazione attorno all'asse delle  $y$  che è principale d'inerzia.
- Se  $p = 0, q = 0, r \neq 0$ , si ha una rotazione attorno all'asse delle  $z$  che è principale d'inerzia.

Caso 2: Tra  $A, B, C$  ce ne sono due uguali ed il terzo è diverso; sia, per esempio  $A = B \neq C$ .

Le (33) diventano  $qr = 0, pr = 0$ .

- Se  $r \neq 0 \Rightarrow p = q = 0$ , cioè rotazione attorno all'asse delle  $z$  che è principale d'inerzia.
- Se  $r = 0 \Rightarrow p$  e  $q$  sono qualunque  $\Rightarrow$  ho per soluzione qualunque  $\vec{\omega}$  ortogonale all'asse delle  $z$ ; ma  $A = B$  ci dice che l'ellissoide d'inerzia è rotondo attorno all'asse delle  $z$  per cui qualunque retta ad esso ortogonale è principale d'inerzia  $\Rightarrow$  il teorema è provato.

Caso 3:  $A = B = C$ .

- Le (33) sono soddisfatte da qualunque  $\vec{\omega}$ . Poichè l'ellissoide d'inerzia è una sfera,  $\vec{\omega}$  ha anche in questo caso la direzione di un asse principale d'inerzia.  
Si noti che, in questo caso, dalle (32) si ha che  $p, q$  ed  $r$  sono costanti per cui la rotazione permanente è anche la soluzione generale delle equazioni di Eulero e non soltanto una soluzione particolare.

Solidi a struttura giroscopica: Sono quelli con  $A = B \neq C$ .

In tal caso la (32)<sub>3</sub> ci dice che  $r = r_0$  costante.

Ma le equazioni di Eulero sono state ricavate da  $\dot{\vec{K}}_O = \vec{M}_O^e$ , ovvero  $\dot{\vec{K}}_O = \vec{0}$ , visto che siamo nell'ipotesi di moti per inerzia; ne segue  $\vec{K}_O = \vec{K}_O^e$  costante nel riferimento assoluto. Da

$$\begin{cases} Ap\vec{i} + Aq\vec{j} + Cr_0\vec{k} = \vec{K}_O^e & \Rightarrow p\vec{i} + q\vec{j} = -\frac{C}{A}r_0\vec{k} + \frac{1}{A}\vec{K}_O^e \\ p\vec{i} + q\vec{j} + r_0\vec{k} = \vec{\omega}, \end{cases}$$

$$\text{ricavo } \vec{\omega} = \underbrace{\left(1 - \frac{C}{A}\right) r_0 \vec{k}}_{\text{costante nel riferimento relativo}} + \underbrace{\frac{1}{A} \vec{K}_O^a}_{\text{costante nel riferimento assoluto}}$$

Pertanto il moto è una precessione regolare.

### DINAMICA DEL SOLIDO LIBERO

Le equazioni (11)<sub>3</sub> di pag. 76 degli appunti di Meccanica 1 non devono essere imposte perchè non ci sono vincoli. Determineremo il moto dalle (11)<sub>1,2</sub>, cioè

$$\begin{cases} m\vec{a}_G = \vec{R}^{ea} \\ \dot{\vec{K}}_G = \vec{M}_G^{ea} \end{cases} \quad (34)$$

Abbiamo così 6 equazioni in 6 incognite (che potrebbero essere le coordinate di  $G$  e gli angoli di Eulero); può accadere, per particolari sistemi di forze, che l'equazione (34)<sub>1</sub> coinvolga solo le coordinate del baricentro, per cui essa serve solo a determinare il moto del baricentro. Il primo membro della (34)<sub>2</sub> dipende solo dagli angoli di Eulero in quanto l'aver scelto come polo il baricentro ci permette di utilizzare la proprietà  $\vec{K}_G = \vec{K}'_G$  che è il momento delle quantità di moto nel riferimento baricentrale, dove  $G$  è fisso; può accadere, per particolari sistemi di forze, che anche il secondo membro dell'equazione (34)<sub>2</sub> coinvolga solo gli angoli di Eulero. Si dice che in questo caso il moto del baricentro è separabile dal moto attorno al baricentro. In tal caso, per lo studio della (34)<sub>2</sub> si applicano tutte le considerazioni fatte per il corpo rigido con punto fisso e liscio. Ricordiamo alcuni semplici esempi:

Esempio 1: Moto del corpo rigido libero e pesante. In tal caso, il secondo membro della (34)<sub>1</sub> è  $m\vec{g}$  e la sua soluzione ci dice che il baricentro si muove su una parabola; invece il secondo membro della (34)<sub>2</sub> è zero e si ottiene che il moto attorno al baricentro è un moto per inerzia, addirittura una precessione regolare se l'ellissoide d'inerzia del corpo è rotondo.

Esempio 2: Moto della Terra attorno al Sole. Le forze gravitazionali sono equivalenti ai loro risultanti applicati nei centri della Terra e del sole rispettivamente; perciò la (34)<sub>1</sub> ci dice che il centro della Terra si muove secondo quanto abbiamo già visto per il moto di un punto in un campo gravitazionale