Inoltre, $\det \mathbf{W} = 0$, se la dimensione n dello spazio su cui agisce $\mathbf{W}$ è dispari, poiché

$$\det \mathbf{W} = \det \mathbf{W}^T = \det(-\mathbf{W}) = (-1)^n \det \mathbf{W}.$$

Consideriamo infine in maggior dettaglio il caso $n = 3$. Attraverso un calcolo esplicito è possibile dimostrare che esiste uno e un solo vettore $\boldsymbol{\omega}$, detto *vettore assiale* di $\mathbf{W}$, tale che

$$\mathbf{W}\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3. \tag{A.26}$$

Le componenti di $\boldsymbol{\omega}$ in una qualunque base sono legate agli elementi di matrice di $\mathbf{W}$ come segue:

$$\omega_1 = w_{32} = -w_{23}, \qquad \omega_2 = w_{13} = -w_{31}, \qquad \omega_3 = w_{21} = -w_{12}.$$

Sottolineiamo ancora come la seconda e la terza delle precedenti relazioni seguano dalla prima attraverso semplici permutazioni cicliche degli indici $1 \to 2 \to 3 \to 1$.

A.4 Diagonalizzazione simultanea di matrici simmetriche

Rienunciamo e dimostriamo ora la proprietà utilizzata a pagina 270, riguardante il carattere delle radici del polinomio caratteristico (12.49).

Teorema (Diagonalizzazione simultanea). *Sia* $\mathbf{A}$ *una matrice* $N \times N$*, simmetrica e definita positiva, tale cioè che valgano le proprietà* $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ *e* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} > 0$ *per ogni* $\mathbf{v} \neq 0$*. Sia inoltre* $\mathbf{B}$ *una matrice* $N \times N$ *simmetrica. Esiste un base di vettori* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N\}$*, ortonormale rispetto al prodotto scalare*

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v},$$

in cui $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *si trasformano rispettivamente nella matrice identità e in una matrice diagonale. Inoltre, tutte le radici del polinomio caratteristico*

$$\det(\mathbf{B} - \mu \mathbf{A}) = 0 \tag{A.27}$$

sono reali (ed occupano le posizioni diagonali nella suddetta rappresentazione di $\mathbf{B}$*).*

Dimostrazione. Indicato con $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ il prodotto scalare canonico, definiamo il seguente prodotto scalare, associato ad $\mathbf{A}$:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v}. \tag{A.28}$$

È semplice verificare che l'operazione bilineare definita in (A.28) gode di tutte le proprietà che definiscono un prodotto scalare, grazie alla simmetria di $\mathbf{A}$ e al suo carattere definito positivo.

La matrice $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ è simmetrica rispetto al prodotto scalare (A.28). Infatti

$$(\mathbf{u}, \mathbf{C}\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{C}\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Per il Teorema spettrale, esiste quindi una base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N\}$, composta da autovettori di $\mathbf{C}$, che è ortonormale rispetto al prodotto scalare (A.28):

$$\mathbf{C}\mathbf{v}_k = \mu_k \mathbf{v}_k \qquad \forall k = 1, \ldots, N, \tag{A.29}$$

e inoltre $(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k) = \delta_{jk}$, dove δ_{jk} indica il simbolo di Kronecker. Inoltre, gli autovalori $\{\mu_k, k = 1, \ldots, N\}$ sono reali.

Nella base appena identificata, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono rappresentate dalla matrice identità e dalla matrice diagonale i cui elementi diagonali sono gli autovalori di $\mathbf{C}$. Infatti, detti a_{jk} e b_{jk} i loro elementi di matrice, abbiamo

$$
\begin{aligned}
a_{jk} &= \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{A}\mathbf{v}_k = (\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k) = \delta_{jk}, \\
b_{jk} &= \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{B}\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{A}(\mathbf{C}\mathbf{v}_k) = \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{A}(\mu_k \mathbf{v}_k) = \mu_k \delta_{jk}.
\end{aligned}
$$

Se, infine, sostituiamo la definizione di $\mathbf{C}$ in (A.29) troviamo immediatamente che i suoi autovalori sono esattamente le radici del polinomio caratteristico (A.27):

$$\mathbf{C}\mathbf{v}_k = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{v}_k = \mu_k \mathbf{v}_k \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}\mathbf{v}_k = \mu_k \mathbf{A}\mathbf{v}_k \quad \Rightarrow \quad \det\left(\mathbf{B} - \mu_k \mathbf{A}\right) = 0. \qquad \square$$

Passiamo ora alla dimostrazione di un teorema utilizzato a pagina 274.

Teorema (Segnatura di una matrice simmetrica). *Sia* $\mathbf{A}$ *una matrice* $N \times N$, *simmetrica e definita positiva, tale cioè che valgano le proprietà* $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ *e* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} > 0$ *per ogni* $\mathbf{v} \neq 0$. *Sia inoltre* $\mathbf{B}$ *una matrice* $N \times N$ *simmetrica. Il polinomio caratteristico*

$$\det\left(\mathbf{B} - \mu \mathbf{A}\right) = 0$$

ha un numero di radici positive, nulle e negative esattamente pari al numero di autovalori positivi, nulli e negativi della matrice $\mathbf{B}$.

Dimostrazione. Introduciamo nuovamente il prodotto scalare canonico $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, insieme al prodotto scalare $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v}$, associato ad $\mathbf{A}$.

Sia $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_N\}$ una base ortonormale di autovettori di $\mathbf{B}$, scelta in modo che i rispettivi autovalori $\{\nu_1, \ldots, \nu_N\}$ siano ordinati in modo decrescente. In particolare, i primi r autovettori saranno positivi, i successivi s saranno nulli e i rimanenti $N - r - s$ saranno negativi. Siano inoltre V_+, V_0 e V_- i sottospazi rispettivamente generati dai primi r, dai successivi s e dagli ultimi $N - r - s$ autovettori.

La matrice $\mathbf{B}$ è definita positiva in V_+, nulla in V_0 e definita negativa in V_-, indipendentemente dal prodotto scalare utilizzato per calcolarne il suo segno. Infatti, dato

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} v_i \mathbf{e}_i \in V_+ \qquad (\mathbf{v} \neq 0)$$

si ha

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{B}\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \mathbf{B}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} &= \sum_{i,j=1}^{r} v_i v_j \mathbf{B}\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_j = \sum_{i,j=1}^{r} \nu_i v_i v_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_j \\
&\geq \nu_r \sum_{i,j=1}^{r} v_i v_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_j = \nu_r \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} > 0.
\end{aligned}
$$

Nella precedente dimostrazione si è usato il fatto che ν_r è il più piccolo degli autovalori positivi, e che $\mathbf{A}$ è definita positiva. In modo analogo si dimostra che $\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ se $\mathbf{v} \in V_0$, e infine che $(\mathbf{B}\mathbf{v}, \mathbf{v}) < 0$ se $\mathbf{v} \in V_- \setminus \{\mathbf{0}\}$.