4 Lunghezza, curvatura e torsione di una curva

Un punto P od un vettore $\vec{v}$ possono dipendere da un parametro t variabile in un intervallo (t_0, t_1). In questo caso si possono definire i concetti di limite e di funzione continua. Si può poi definire la derivata in un punto P o di un vettore $\vec{v}$, così come si fa per le funzioni scalari.

Ricordiamo ora due proprietà che verranno usate molte volte in questo corso.

1. La derivata di un vettore di modulo costante risulta ortogonale al vettore stesso. Infatti,

$$\frac{d(v^2)}{dt} = \frac{d(\vec{v}\cdot\vec{v})}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{d(v_i^2)}{dt} = 2\sum_{i=1}^{3} v_i \frac{dv_i}{dt} = 2\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = 0,$$

   poichè abbiamo assunto costante v^2. Vale anche il viceversa: se $\vec{v}$ ed il suo derivato sono ortogonali allora il vettore $\vec{v}$ ha modulo costante.

2. Se, per ogni t, un vettore $\vec{v}$ è parallelo al suo derivato allora $\vec{v}$ ha direzione invariabile. Infatti, se

$$\vec{v}\wedge\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$$

   scrivendo $\vec{v} = |\vec{v}|\vec{e}$ dove con $\vec{e}$ si è indicato un versore del vettore $\vec{v}$, si ha:

$$\vec{v}\wedge\frac{d\vec{v}}{dt} = |\vec{v}|\vec{e}\wedge\left(\frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{e} + |\vec{v}|\frac{d\vec{e}}{dt}\right) = |\vec{v}|^2\vec{e}\wedge\frac{d\vec{e}}{dt} = \vec{0}.$$

   L'ultima equazione comporta $\dfrac{d\vec{e}}{dt} = \vec{0}$ e da qui l'invariabilità della direzione del vettore $\vec{v}$. Anche di questa proprietà vale il viceversa.

Le curve nel piano o nello spazio si possono introdurre come insiemi di livello di funzioni $F : U \to \mathbb{R}$ (per i nostri scopi è sufficiente che siano di classe C^2), dove U è un sottoinsieme aperto in $\mathbb{R}^2$ o in $\mathbb{R}^3$. In altre parole,

$$\text{Curva} = \begin{cases} \{(x_1,x_2)\in U : F(x_1,x_2)=0\}, & \text{curva piana,} \\ \{(x_1,x_2,x_3)\in U : \begin{cases} F(x_1,x_2,x_3)=0 \\ G(x_1,x_2,x_3)=0 \end{cases}\}, & \text{curva spaziale.} \end{cases}$$

Un punto P della curva, di coordinate (x_1, x_2), si dice *non singolare* se il gradiente della F calcolato nel punto (x_1,x_2) o (x_1,x_2,x_3) non è nullo. Una curva i cui punti sono tutti non singolari si dice una *curva regolare*.

Se la curva è data in forma parametrica $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$, cioè, se

$$\text{Curva} = \{(t, \boldsymbol{x}(t)) : t \in (t_1, t_2)\}$$

per un'opportuna funzione continua $\boldsymbol{x} : (t_1, t_2) \to \mathbb{R}^2$ (curva piana) oppure $\boldsymbol{x} : (t_1, t_2) \to \mathbb{R}^3$ (curva spaziale), allora un punto $\boldsymbol{x}(t_0)$ si dice non singolare se $\dot{\boldsymbol{x}}(t_0) \neq \vec{0}$. Secondo il Teorema delle Funzioni Implicite, ogni curva per cui la F è di classe C^1 può essere scritta in forma parametrica in un opportuno intorno di ciascun punto di regolarità.

Esempio I.1 Le circonferenze $x_1^2 + x_2^2 = R^2$ con centro l'origine e raggio $R > 0$ sono curve regolari. Ponendo $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - R^2$, risulta che, per ogni punto (x_1, x_2) della circonferenza, il gradiente della F è sempre un vettore di norma $2R$. La curva è facilmente parametrizzabile ponendo $x_1(t) = R\cos(t)$ e $x_2(t) = R\sin(t)$, dove $t \in [0, 2\pi]$.

La *lunghezza* l di una curva $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$, $t \in (a, b)$, è data dall'integrale

$$l = \int_a^b |\dot{x}(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{\dot{\boldsymbol{x}}(t) \cdot \dot{\boldsymbol{x}}(t)}\, dt.$$

Nel caso particolare di un grafico, $\boldsymbol{x}(t) = (t, f(t))$, risulta nel caso di una curva piana

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$$

e nel caso di una curva spaziale

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f_1'(t)]^2 + [f_2'(t)^2]}\, dt,$$

dove $f = (f_1, f_2)$. È facile dimostrare che la lunghezza di una curva non dipende dalla scelta della sua parametrizzazione.

Qualsiasi curva differenziabile e non singolare ammette una *parametrizzazione naturale* con un parametro s (detto *lunghezza d'arco* oppure *ascissa curvilinea*):

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\boldsymbol{x}}(t')|\, dt'.$$

Di conseguenza,

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{ds} = \frac{\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\dot{\boldsymbol{x}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{x}}(t)|}.$$

In altre parole,

$$\left|\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}(s)\right| = 1. \tag{I.6}$$

Il vettore unitario

$$\boldsymbol{t}(s) = \frac{d\boldsymbol{x}(s)}{ds}$$

è detto *versore tangente* alla curva.

Nei punti in cui $(d^2\boldsymbol{x}/ds^2) \neq \vec{0}$ è definito il vettore unitario

$$\boldsymbol{n}(s) = \frac{1}{k(s)} \frac{d^2\boldsymbol{x}}{ds^2},$$

detto *versore normale principale* e dove la sua norma

$$k(s) = \left| \frac{d^2\boldsymbol{x}}{ds^2} \right|$$

è detta *curvatura*. Il suo reciproco $R(s) = [1/k(s)]$ è detto *raggio di curvatura*. Di conseguenza, risulta la prima identità di Frenet:

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = k(s)\boldsymbol{n}. \tag{I.7}$$

Il piano contenente i versori tangente e normale principale $\boldsymbol{t}$ e $\boldsymbol{n}$ si chiama *piano osculatore* nel punto $\boldsymbol{x}(t)$. Questo piano contiene la circonferenza passante per il punto $\boldsymbol{x}(t)$ che è la migliore approssimazione della curva in un intorno del punto $\boldsymbol{x}(t)$.

Esempio I.2 Consideriamo la circonferenza con centro l'origine e raggio $R > 0$ parametrizzata da $\boldsymbol{x}(t) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t))$, dove $\omega > 0$. Si ha

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{[-\omega R\sin(\omega t')]^2 + [\omega R\cos(\omega t')]^2}\, dt' = \omega Rt.$$

Quindi

$$\boldsymbol{t}(s) = \frac{d\boldsymbol{x}}{ds} = (-\sin(\omega t), \cos(\omega t)) = (-\sin(s/R), \cos(s/R)).$$

Dunque

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{ds^2} = \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = -\frac{1}{R}(\cos(s/R), \sin(s/R)).$$

Di conseguenza, la curvatura $k(s) = (1/R)$ e il raggio di curvatura $R(s) = R$. Il versore normale principale $\boldsymbol{n}(s) = -(\cos(s/R), \sin(s/R))$.

Consideriamo ora il vettore unitario

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{n},$$

detto *versore binormale*. Allora la terna costituita dai versori $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{b}$ è ortonormale e genera un sistema di coordinate destroso.

Deriviamo ora le altre due identità di Frenet. Siccome $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} = 1$, si ha

$$0 = \frac{d(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n})}{ds} = 2\boldsymbol{n} \cdot \frac{d\boldsymbol{n}}{ds},$$

e quindi $[d\boldsymbol{n}/ds]$ è una combinazione lineare di $\boldsymbol{t}$ e $\boldsymbol{b}$:

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = c_1(s)\boldsymbol{t} + c_2(s)\boldsymbol{b}$$

per opportune costanti $c_1(s)$ e $c_2(s)$. D'altra parte, $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{t} = 0$ implica che

$$0 = \frac{d(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{t})}{ds} = \boldsymbol{n} \cdot \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} + \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} \cdot \boldsymbol{t} = k(s)\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} + \{c_1(s)\boldsymbol{t} + c_2(s)\boldsymbol{b}\} \cdot \boldsymbol{t} = k(s) + c_1(s),$$

e quindi $c_1(s) = -k(s)$. Inoltre, derivando $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{n}$ si ha

$$\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} &= \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} \wedge \boldsymbol{n} + \boldsymbol{t} \wedge \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} \\
&= [k(s)\boldsymbol{n}] \wedge \boldsymbol{n} + \boldsymbol{t} \wedge [-k(s)\boldsymbol{t} + c_2(s)\boldsymbol{b}] \\
&= c_2(s)(\boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{b}) = c_2(s)[\boldsymbol{t} \wedge (\boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{n})] \\
&= c_2(s)[-(\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{t})\boldsymbol{n} + (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{t})\boldsymbol{t}] = -c_2(s)\boldsymbol{n}.
\end{aligned}$$

Chiamando $\chi(s) \stackrel{\text{def}}{=} -c_2(s)$ *torsione* oppure *seconda curvatura*, otteniamo le seguenti identità di Frenet:[2]

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = k(s)\boldsymbol{n}(s), \tag{I.8a}$$

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -k(s)\boldsymbol{t}(s) - \chi(s)\boldsymbol{b}(s), \tag{I.8b}$$

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \chi(s)\boldsymbol{n}(s). \tag{I.8c}$$

Quindi le equazioni (I.8) si possono scrivere in forma matriciale:

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & -\chi(s) \\ 0 & \chi(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che la torsione $\chi(s) \equiv 0$ se e solo se la curva è piana. Infatti, $\chi(s) \equiv 0$ implica che il versore binormale $\boldsymbol{b}(s) = \boldsymbol{t}(s) \wedge \boldsymbol{n}(s)$ non dipende da s e quindi il piano contenente $\boldsymbol{t}(s)$ e $\boldsymbol{n}(s)$ non dipende da s. Quest'ultimo fatto implica che la curva è piana.

[2]Jean Frédéric Frenet (1816-1900). Risultato pubblicato nel 1847 (tesi di dottorato a Tolosa) e nel 1852 (in Journal de Mathématiques Pures et Appliquées).

Esempio I.3 [Elica circolare cilindrica] Consideriamo la curva spaziale

$$\boldsymbol{x}(t) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t), ct),$$

dove R, ω e c sono costanti positive. Allora

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{[-\omega R\sin(\omega t')]^2 + [\omega R\cos(\omega t')]^2 + c^2}\,dt' = t\sqrt{\omega^2R^2+c^2}.$$

Quindi il versore tangente vale

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t}(s) &= \frac{\boldsymbol{x}'(t)}{s'(t)}\\ &= \left(\frac{-\omega R}{\sqrt{\omega^2R^2+c^2}}\sin(\omega t), \frac{\omega R}{\sqrt{\omega^2R^2+c^2}}\cos(\omega t), \frac{c}{\sqrt{\omega^2R^2+c^2}}\right)\\ &= \left(\frac{-\omega R}{\sqrt{\omega^2R^2+c^2}}\sin(\frac{\omega s}{\sqrt{\omega^2R^2+c^2}}), \frac{\omega R}{\sqrt{\omega^2R^2+c^2}}\cos(\frac{\omega s}{\sqrt{\omega^2R^2+c^2}}), \frac{c}{\sqrt{\omega^2R^2+c^2}}\right).\end{aligned}$$

Di conseguenza, la curvatura $k(s) = [\omega^2R/(\omega^2R^2+c^2)]$, mentre

$$\boldsymbol{n}(s) = -\left(\cos(\frac{\omega s}{\sqrt{\omega^2R^2+c^2}}), \sin(\frac{\omega s}{\sqrt{\omega^2R^2+c^2}}), 0\right).$$

Calcolando

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{b}(s)\\ &= \left(\frac{c}{\sqrt{\omega^2R^2+c^2}}\sin(\frac{\omega s}{\sqrt{\omega^2R^2+c^2}}), \frac{-c}{\sqrt{\omega^2R^2+c^2}}\cos(\frac{\omega s}{\sqrt{\omega^2R^2+c^2}}), \frac{\omega R}{\sqrt{\omega^2R^2+c^2}}\right),\end{aligned}$$

otteniamo $[d\boldsymbol{b}/ds] = \chi(s)\boldsymbol{n}$, dove la torsione

$$\chi(s) = -\frac{c\omega}{\omega^2R^2+c^2}.$$

Esempio I.4 [Spirale logaritmica] Consideriamo la curva di equazione [cioè, la spirale logaritmica]

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{-t}\left\{\cos(t)\vec{\imath} + \sin(t)\vec{\jmath}\right\}.$$

In tal caso

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = e^{-t}\left\{-(\cos(t)+\sin(t))\vec{\imath} + (\cos(t)-\sin(t))\vec{\jmath}\right\}, \qquad \|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\| = e^{-t}\sqrt{2},$$

e quindi $s(t) = \sqrt{2}\,[1-e^{-t}]$ per $t \geq 0$. Si ottiene per il versore tangente

$$\boldsymbol{t}(s) = \frac{\dot{\boldsymbol{x}}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-(\cos(t)+\sin(t))\vec{\imath} + (\cos(t)-\sin(t))\vec{\jmath}\right\},$$

essendo $t = \ln[\sqrt{2}/(\sqrt{2} - s)]$ per $0 \leq s < \sqrt{2}$. Ciò implica

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (\sin(t) - \cos(t))\vec{\imath} - (\sin(t) + \cos(t))\vec{\jmath} \right\} \frac{1}{\sqrt{2} - s},$$

essendo $(dt/ds) = [1/(\sqrt{2} - s)]$. La curvatura è data dall'espressione

$$k(s) = \left\| \frac{dt}{ds} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2} - s}, \qquad 0 \leq s < \sqrt{2},$$

che conduce al versore normale

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{k(s)} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (\sin(t) - \cos(t))\vec{\imath} - (\sin(t) + \cos(t))\vec{\jmath} \right\},$$

essendo $t = \ln[\sqrt{2}/(\sqrt{2} - s)]$ per $0 \leq s < \sqrt{2}$. Dunque $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{n} = \vec{k}$ è il versore binormale. Poichè $\boldsymbol{b}$ non dipende da s, risulta la torsione $\chi(s) = 0$. Quest'ultimo risultato segue anche dal fatto che la curva è piana.

Esempio I.5 [Cavatappi] Calcoliamo ora la curvatura, i versori tangenziale, normale e binormale, e la torsione della curva di equazione [cioè, del "cavatappi"]

$$\vec{x}(t) = e^{-t} \left\{ \cos(t)\vec{\imath} + \sin(t)\vec{\jmath} + \vec{k} \right\}.$$

In tal caso

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = e^{-t} \left\{ -(\cos(t) + \sin(t))\vec{\imath} + (\cos(t) - \sin(t))\vec{\jmath} - \vec{k} \right\}, \qquad \|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\| = e^{-t}\sqrt{3},$$

e quindi $s(t) = \sqrt{3}\,[1 - e^{-t}]$ per $t \geq 0$. Si ottiene per il versore tangente

$$\boldsymbol{t}(s) = \frac{\dot{\boldsymbol{x}}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ -(\cos(t) + \sin(t))\vec{\imath} + (\cos(t) - \sin(t))\vec{\jmath} - \vec{k} \right\},$$

essendo $t = \ln[\sqrt{3}/(\sqrt{3} - s)]$ per $0 \leq s < \sqrt{3}$. Ciò implica

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ (\sin(t) - \cos(t))\vec{\imath} - (\sin(t) + \cos(t))\vec{\jmath} \right\} \frac{1}{\sqrt{3} - s},$$

essendo $(dt/ds) = [1/(\sqrt{3} - s)]$. La curvatura è data dall'espressione

$$k(s) = \left\| \frac{dt}{ds} \right\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{3} - s}, \qquad 0 \leq s < \sqrt{3},$$

che conduce al versore normale

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{k(s)} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (\sin(t) - \cos(t))\vec{\imath} - (\sin(t) + \cos(t))\vec{\jmath} \right\},$$

essendo $t = \ln[\sqrt{3}/(\sqrt{3} - s)]$ per $0 \le s < \sqrt{3}$. Dunque

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left\{ -(\cos(t) + \sin(t))\vec{\imath} + (\cos(t) - \sin(t))\vec{\jmath} + 2\vec{k} \right\}$$

è il versore binormale. Ciò implica

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left\{ (\sin(t) - \cos(t))\vec{\imath} - (\sin(t) + \cos(t))\vec{\jmath} \right\} \frac{1}{\sqrt{3} - s} = \frac{1}{\sqrt{3}\,[\sqrt{3} - s]} \boldsymbol{n},$$

e quindi la torsione $\chi(s) = [1/(\sqrt{3}\,[\sqrt{3} - s])]$.