del cerchio e la sua grandezza e' data dal prodotto del raggio di questo per il quadrato della velocita' angolare. L'aver trovato una accelerazione puramente centripeta e' in accordo con quanto e' stato osservato in generale al n.13 per i moti uniformi.

Osserveremo qui infine che dalla costanza di ϕ segue ovviamente che, ad intervalli di tempo di $\frac{2\pi}{\omega}$, il punto P riprende sulla circonferenza la stessa posizione e quindi anche, stante (39), (45), la stessa velocita' e la stessa accelerazione. Tale proprieta' si suole esprimere dicendo che il moto circolare uniforme e' *periodico* di periodo

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \quad . \tag{46}$$

17.- Moti armonici.

Si supponga ancora che il punto P si muova di moto circolare uniforme e si fissi l'attenzione sul moto rettilineo della proiezione di P sopra qualsiasi diametro del cerchio, ad es. sul moto della proiezione P_x di P sull'asse x (fig.27).

Mentre il punto P, proseguendo nel suo moto, descrive quante volte si vogliono la circonferenza, il punto P_x oscilla altrettante volte da A a B e viceversa. Al moto rettilineo di P_x si suole dare il nome di *moto armonico* e la sua considerazione e' importante non solo in Meccanica ma anche in molteplici altri rami della Fisica.

L'equazione del moto armonico di P_x e' la (44_1). Derivando questa rispetto a t e tenendo conto di (44_2) si ha

$$\dot{x} = -r\dot{\phi}\,\mathrm{sen}(\dot{\phi}t + \alpha) = -\dot{\phi}y \quad , \tag{47}$$

donde, derivando ancora rispetto a t e tenendo conto di (44_1), traesi poi

$$\ddot{x} = -r\dot{\phi}^2\cos(\dot{\phi}t + \alpha) = -\omega^2 x \quad . \tag{48}$$

Le (47), (48) forniscono rispettivamente la velocita' e l'ac

Si può anche dire che moto armonico è un moto tale che
$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

celerazione scalare del punto P_x . Ad esse si sarebbe potuto pervenire anche proiettando sull'asse x le espressioni (39), (45) della velocita' ed accelerazione vettoriale di P.

Naturalmente la stessa periodicita' del moto circolare uniforme del punto P si presenta anche nel moto armonico della sua proiezione P_x : ad intervalli di tempo T, ancora espressi da (46), il punto P_x ripassa per la stessa posizione, colla stessa velocita' e la stessa accelerazione. Il tempo T si chiama *periodo* del moto armonico; il suo inverso

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{49}$$

che fornisce il numero (intero o no) dei periodi contenuti nella unita' di tempo, si chiama *frequenza* del moto; la costante ω (grandezza della velocita' angolare del moto di P) si chiama *costante di frequenza* o *pulsazione*.

Inoltre il punto O (centro della circonferenza descritta da P) dicesi *centro* del moto armonico; la costante r (meta' dell'oscillazione semplice) *ampiezza* del moto; il binomio $\omega t + \alpha$ (che da' l'anomalia di P all'istante t) *fase attuale* del moto; la costante α *fase iniziale* del moto od anche semplicemente *fase*.

Dall'espressione (47) della velocita' di P_x e specificamente dalla proporzionalita' di questa all'ordinata y di P, segue che la velocita' di P_x e' nulla in A, cresce in grandezza allo spostarsi di P_x verso il centro O (moto accelerato), raggiunge il suo massimo valore assoluto in O, indi diminuisce in grandezza (moto ritardato) fino ad annullarsi in B. Nella fase di ritorno da B in A, la velocita' di P_x riprende poi, in ogni singola posizione di P_x, lo stesso valore di prima, salvo il segno.

Per quanto riguarda l'accelerazione (48) di P_x osserveremo che, essendo proporzionale all'ascissa x di P_x, essa si annulla nel centro O e raggiunge il massimo valore assoluto in A e B. Il suo segno e' poi sempre opposto a quello di x, cosicche' il vettore accelerazione risulta sempre orientato da P_x verso O.

18.- Equazione differenziale dei moti armonici.

Dalla (48) appare che in ogni moto armonico di costante di frequenza ω, cioe' di periodo $\frac{2\pi}{\omega}$, l'accelerazione $\ddot{x}$ e l'ascissa x del punto mobile sono, ad ogni istante, legate dalla relazione

$$(50) \qquad \boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}\ ,$$

ove non compaiono ne' l'ampiezza r, ne' la fase iniziale α del moto armonico considerato.

In altri termini, cio' significa che la funzione di t

$$(51) \qquad \boxed{x = r\cos(\omega t + \alpha)}$$

soddisfa, comunque si scelgano le costanti r e α, all'equazione differenziale (50) che e' un'equazione differenziale del 2° ordine, lineare omogenea e a coefficienti costanti. E' facile anzi provare, come appunto ora faremo, che la (51) fornisce proprio lo integrale generale dell'equazione differenziale (50).

Difatti, posto

$$(52) \qquad c_1 = r\cos\alpha \quad , \quad c_2 = r\,\mathrm{sen}\,\alpha \quad ,$$

la (51) puo' scriversi

$$(53) \qquad x = c_1\cos\omega t - c_2\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

ed appare quindi essere una combinazione lineare di due soluzioni linearmente indipendenti $\cos\omega t$ e $\mathrm{sen}\,\omega t$ della (50). Si puo' anzi proprio dire che la (51) e' una combinazione lineare *arbitraria* delle dette due soluzioni, dato che l'arbitrarieta' di r e α implica, pel tramite delle (52), quella di c_1 e c_2.

Per un noto teorema di Analisi, cio' permette di concludere che effettivamente la (51) fornisce l'integrale generale della (50) e cioe' che *l'equazione differenziale* (50) *e' soddisfatta da tutti e soli i moti armonici di dato periodo* $\frac{2\pi}{\omega}$. Per tale motivo la (50) si suole chiamare *equazione differenziale dei moti armonici*.

19.- Vettori rotanti e vettori alternativi.

Un vettore applicato $(O, \mathbf{v})$, variabile nel tempo ma coll'estremo O fisso, si dice *vettore rotante* se il suo estremo libero si muove di moto circolare uniforme di centro O, mentre si dice *vettore alternativo* se detto estremo si muove di moto armonico di centro O. Cosi', supponendo che il punto P descriva la circonferenza della fig. 27 con moto uniforme, il vettore applicato $(O, \mathbf{v})$ con $\mathbf{v} = P - O$ e' un esempio di vettore rotante e con $\mathbf{v} = P_x - O$ e' invece un esempio di vettore alternativo.

Naturalmente per i vettori rotanti e per i vettori alternativi si usano, con ovvia estensione, tutte le denominazioni che sono state introdotte nei n.[i] prec.[i] per i moti circolari uniformi e per i moti armonici. Ad es. il periodo di un vettore rotante e' il periodo del moto circolare uniforme del suo estremo libero, la ampiezza di un vettore alternativo e' l'ampiezza del moto armonico del suo estremo libero e cosi' via.

Per la definizione stessa di moto armonico (n.17) un vettore alternativo di centro O e retta d'applicazione a si puo' sempre considerare come la proiezione ortogonale su a di un vettore rotante attorno ad O con velocita' angolare eguale alla costante di frequenza ω del vettore alternativo. Tale osservazione ci tornera' utile nel prossimo numero dedicato alla composizione di piu' moti armonici aventi lo stesso centro e la stessa retta d'applicazione.

Qui intanto preciseremo la nozione di *moto composto* di piu' moti armonici aventi lo stesso centro O, nozione che si puo' far rientrare in quella generale del n.5 di moto composto di tre moti rettilinei qualsiasi non complanari solo se i moti armonici da comporre sono tre ed avvengono su rette non complanari.

Nel caso generale che i moti armonici di centro O che si vogliono comporre siano n e che le loro rette d'applicazione $a_1, a_2, \ldots, a_n$ siano rette qualsiasi (non necessariamente distinte) uscenti da O, *diremo moto composto il moto del punto* P *definito dall'essere* $P - O$ *eguale al risultante dei vettori alternativi che rappresentano i singoli moti armonici componenti.* In altri termini, se $\mathbf{u}_i$ e' il versore della retta a_i orientata a piacere ed r_i, ω_i, α_i sono rispettivamente l'ampiezza, la costante di frequenza e la fase iniziale del moto armonico svolgentesi su a_i e quindi

$$P_i - O = r_i \cos(\omega_i t + \alpha_i)\mathbf{u}_i \tag{54}$$

e' il vettore alternativo che rappresenta l'i^{mo} moto armonico componente, l'equazione geometrica del moto composto e', secondo la definizione teste' data,

$$(55) \qquad P-O = \sum_1^n{}_i (P_i - O) = \sum_1^n{}_i \, r_i \cos(\omega_i t + \alpha_i)\, \mathbf{u}_i \, .$$

E' evidente che per $n = 3$ ed a_1, a_2, a_3 non complanari tale definizione di moto composto rientra in quella del n. 5.

20. - Composizione di moti armonici aventi lo stesso centro e la stessa retta d'applicazione.

Dimostreremo anzitutto che:

Il moto composto di piu' moti armonici aventi lo stesso centro, la stessa retta d'applicazione e la stessa frequenza e' un moto armonico avente in comune con i moti componenti il centro, la retta d'applicazione e la frequenza.

Difatti, se e' unica la retta d'applicazione a dei vettori alternativi (54) e se e' $\omega_i = \omega$ $(i = 1, \ldots, n)$, i suddetti vettori alternativi si possono considerare come proiezioni ortogonali su a di n vettori rotanti in uno stesso piano attorno ad O colla velocita' angolare ω. Il risultante di questi vettori rotanti ruota naturalmente anch'esso attorno ad O con velocita' angolare ω e la sua proiezione ortogonale (55) su a e' quindi un vettore alternativo che ha ancora ω come costante di frequenza. L'ampiezza e la fase iniziale di tale vettore alternativo sono poi dati rispettivamente dalla grandezza del risultante dei vettori rotanti e dall'angolo che questo risultante forma nell'istante iniziale colla retta orientata a.

La proposizione teste' dimostrata riguarda il caso che i moti armonici da comporre abbiano, oltre allo stesso centro e alla stessa retta d'applicazione, anche la stessa frequenza. Se invece le frequenze sono diverse, il moto composto non e' piu' armonico come tosto controlleremo nel caso $n = 2$.

Siano invero

$$(56) \qquad x_1 = r_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \quad , \quad x_2 = r_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$

tesi ?

le equazioni di due moti armonici di centro O avvenenti lungo lo asse x. L'equazione del moto composto di tali due moti e', secondo la definizione del n. prec.,

$$x = r_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + r_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \tag{57}$$

e l'espressione della relativa accelerazione e'

$$\ddot{x} = -\omega_1^2 r_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) - \omega_2^2 r_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \; ,$$

donde appare che il rapporto $\frac{\ddot{x}}{x}$ risulta costante solo se e' $\omega_1 = \omega_2$ e quindi (n. 18) solo in tale caso il moto (57) e' armonico.

Per studiare il moto (57) nel caso generale $\omega_1 \neq \omega_2$, osserveremo che, posto

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \; , \quad \varepsilon = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \tag{58}$$

cioe'

$$\omega_1 = \omega - \varepsilon \; , \quad \omega_2 = \omega + \varepsilon \; , \tag{59}$$

risulta

$= \cos(\omega t + \alpha_1 - \varepsilon t) =$

$$\begin{cases} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) = \cos\omega t \cos(\alpha_1 - \varepsilon t) - \operatorname{sen}\omega t \operatorname{sen}(\alpha_1 - \varepsilon t) \\ \qquad = \cos(\omega t + \alpha_2 + \varepsilon t) = \\ \cos(\omega_2 t + \alpha_2) = \cos\omega t \cos(\alpha_2 + \varepsilon t) - \operatorname{sen}\omega t \operatorname{sen}(\alpha_2 + \varepsilon t). \end{cases} \tag{60}$$

Tenendo conto delle (60) e' immediato controllare che l'equazione (57) del moto composto dei due moti armonici (56) puo' scriversi nella forma

$$x = r \cos(\omega t + \alpha) \; , \tag{61}$$

con $r > 0$ ed α funzioni del tempo definite dalle posizioni

$$\begin{cases} r\cos\alpha = r_1 \cos(\alpha_1 - \varepsilon t) + r_2 \cos(\alpha_2 + \varepsilon t) \\ r \operatorname{sen}\alpha = r_1 \operatorname{sen}(\alpha_1 - \varepsilon t) + r_2 \operatorname{sen}(\alpha_2 + \varepsilon t) \end{cases} \tag{62}$$

e quindi variabili col tempo tanto piu' lentamente quanto piu' piccolo e' ε cioe' quanto piu' prossime fra loro sono ω_1, ω_2.

Cio' tenendo presente, dalla (61) segue che:

Il moto composto di due moti armonici, aventi lo stesso centro, la stessa retta d'applicazione e costanti di frequenza ω_1, ω_2 prossime fra loro, differisce da un moto armonico di costante di frequenza $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ solo per il fatto che l'ampiezza r e la fase α delle oscillazioni non sono costanti ma variano col tempo tanto piu' lentamente quanto piu' ω_1, ω_2 sono prossime.

Interessante e' seguire la legge di variazione dell'ampiezza r delle oscillazioni (61). Si ha precisamente, quadrando e sommando le (62),

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos(2\varepsilon t + \alpha_2 - \alpha_1) \tag{63}$$

donde appare che, al crescere di t, la r oscilla fra il massimo $r_1 + r_2$ ed il minimo $|r_2 - r_1|$, l'intervallo di tempo fra due massimi consecutivi essendo molto grande rispetto al periodo $\frac{2\pi}{\omega}$ delle oscillazioni (61) e precisamente eguale a

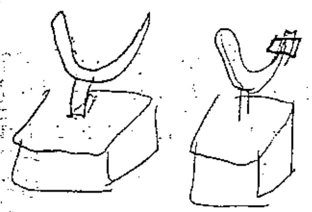
$$\frac{\pi}{|\varepsilon|} = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|} \tag{64}$$

(periodo grande significa che la funzione varia debolmente: periodo piccolo.

Se poi sono anche prossime fra loro le ampiezze r_1, r_2 dei due moti armonici componenti, l'ampiezza r delle oscillazioni (61) varia fra il massimo $r_1 + r_2$ ed un minimo sensibilmente nullo. Il numero per unita' di tempo dei cosidetti *battimenti*, cioe' dei passaggi dal massimo al minimo di r e successivo ritorno al massimo, e' dato ~~dall'inverso di (64) cioe'~~ dalla differenza $\frac{|\omega_2 - \omega_1|}{2\pi}$ delle frequenze dei due moti armonici componenti.

period grande

Come e' noto dalla Fisica, questo fenomeno dei battimenti si puo' riprodurre eccitando contemporaneamente due diapason eguali di cui uno munito di piccoli pezzi addizionali che ne alterano di poco la frequenza. Le variazioni di intensita' del suono che cosi' si ottiene rendono appunto manifesti i battimenti.



21. - Composizione di due moti armonici aventi lo stesso centro e fra loro ortogonali.

Prenderemo ora in esame il problema della composizione di due moti armonici aventi lo stesso centro O ed avvenenti su due assi fra loro ortogonali, con cui identificheremo gli assi x,y della coppia cartesiana ortogonale Oxy.

Le equazioni di tali due moti sono

$$x = r_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \quad , \quad y = r_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \tag{65}$$

e, secondo le definizioni dei n.^{i} 5 e 19, il loro moto composto e' il moto del punto P del piano xy le cui coordinate cartesiate sono espresse, ad ogni istante, da (65). E' evidente che la traiettoria di P non esce dal rettangolo definito dalle limitazioni

$$-r_1 \leq x \leq r_1 \quad , \quad -r_2 \leq y \leq r_2 \quad . \tag{66}$$

Considereremo anzitutto il caso che i due moti armonici componenti abbiano la stessa frequenza e cioe' che sia

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega \quad , \tag{67}$$

mentre indicheremo con

$$\delta = \alpha_2 - \alpha_1 \tag{68}$$

la differenza di fase dei detti due moti. Questi si dicono in coincidenza di fase se e' $\delta = 0$ ed in opposizione di fase se e' invece $\delta = \pm\pi$.

Ci proponiamo qui di provare che:

Il moto composto dei due moti armonici fra loro ortogonali (65) e' nell'ipotesi (67):

1°) per $\operatorname{sen}\delta \neq 0$, un moto la cui traiettoria e' un'ellisse di centro O, iscritta nel rettangolo (66), la quale viene percorsa con velocita' areale costante rispetto ad O;

2°) per $\operatorname{sen}\delta = 0$, un moto armonico di centro O, avente la costante di frequenza (67) e come retta d'applicazione l'una o l'altra delle diagonali del rettangolo (66) secondo che i due moti componenti sono in coincidenza od in opposizione di fase.

A tale scopo osserveremo che si ha da (65), (67), (68)

$$\frac{x}{r_1} = \cos(\omega t + \alpha_1) = \cos(\omega t + \alpha_2 - \delta) = \frac{y}{r_2}\cos\delta + \operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_2)$$

e quindi

$$\operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_2) = \frac{x}{r_1} - \frac{y}{r_2}\cos\delta \,, \tag{69}$$

mentre d'altra parte da (65_2), (67) segue

$$\operatorname{sen}\delta \cos(\omega t + \alpha_2) = \frac{y}{r_2}\operatorname{sen}\delta \,. \tag{70}$$

Quadrando e sommando (69), (70), si ottiene poi

$$\frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} - 2\frac{x}{r_1}\frac{y}{r_2}\cos\delta = \operatorname{sen}^2\delta \,, \tag{71}$$

che e' l'equazione cartesiana della traiettoria di P.

La (71) mostra che detta traiettoria e', per $\operatorname{sen}\delta \neq 0$, una ellisse di centro O iscritta nel rettangolo (66). Tale ellisse é piu' o meno schiacciata secondo il valore di δ; per $\operatorname{sen}\delta = 0$, la conica (71) degenera addirittura nell'una o nell'altra delle diagonali del rettangolo (66), ciascuna contata due volte. L'equazione della diagonale in questione e' precisamente

$$\frac{x}{r_1} = \pm\frac{y}{r_2} \,, \tag{72}$$

col segno + o − secondo che i due moti componenti (65) sono in coincidenza di fase ($\delta = 0$) o in opposizione di fase ($\delta = \pm\pi$).

Per trovare la legge temporale del moto di P nel caso $\operatorname{sen}\delta \neq 0$ in cui la traiettoria e' l'ellisse (71), basta poi osservare che dalle (65) segue

$$\dot{x} = -\omega_1 r_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \alpha_1) \,, \qquad \dot{y} = -\omega_2 r_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \alpha_2) \,, \tag{73}$$

cosicche', stante (32) e (67), l'espressione della velocita' areale di P e'

$$\dot{A} = -\frac{1}{2}\omega r_1 r_2 \operatorname{sen} \delta \quad , \tag{74}$$

manifestamente costante. La legge temporale del moto di P e' quindi semplicemente espressa, per sen $\delta \neq 0$, dalla condizione che P deve percorrere l'ellisse (71) con velocita' areale costante rispetto ad O.

Se e' invece sen $\delta = 0$ e quindi la traiettoria di P coincide con una delle diagonali (72), le (65), (67) dicono senz'altro che P percorre tale diagonale con moto armonico avente lo stesso centro e la stessa frequenza dei due moti armonici componenti.

Resta cosi' completamente provata la proposizione dianzi enunciata riguardante il caso che i due moti armonici ortogonali (65) soddisfino la (67) e cioe' abbiano la stessa frequenza. Molto piu' complesso e' invece il caso generale che le costanti di frequenza ω_1, ω_2 dei due moti componenti siano qualsiasi. In tale caso si puo' provare che:

Il moto composto dei due moti armonici fra loro ortogonali (65) e':

1°) se ω_1, ω_2 sono fra loro commensurabili, un moto periodico avente per traiettoria una curva chiusa ed algebrica iscritta nel rettangolo (66);

2°) se ω_1, ω_2 sono fra loro incommensurabili, un moto aperiodico avente per traiettoria una curva aperta e trascendente che riempie praticamente il rettangolo (66).

Difatti il moto composto dei due moti armonici ortogonali (65) risulta periodico se e solo se esiste un comune multiplo dei periodi $\frac{2\pi}{\omega_1}$, $\frac{2\pi}{\omega_2}$ di detti due moti, cioe' se esistono due numeri interi n_1, n_2 tali che sia

$$\frac{n_1}{\omega_1} = \frac{n_2}{\omega_2} \quad , \tag{75}$$

il che equivale a dire che ω_1, ω_2 devono essere fra loro commensurabili.

Facile e' altresi' controllare che la traiettoria di P [che come abbiamo gia' osservato non esce dal rettangolo (66)] raggiunge ciascun lato di tale rettangolo in uno o piu' punti ivi risultando ad esso tangente, a meno che non si tratti di punti corrispondenti ad istanti di arresto di P. Difatti si consideri ad es. il lato $x = r_1$ del rettangolo (66): tale lato e' raggiunto da P in tutti gli istanti in cui $\omega_1 t + \alpha_1$ risulta multiplo di 2π e, come mostra la (73_1), in tali istanti e' $\dot{x} = 0$, cioe' la velocita' di P e' parallela al lato $x = r_1$ o si annulla.

Rinunciamo invece, per brevita', a provare che, se ω_1, ω_2 sono fra loro commensurabili, la traiettoria di P e' una curva algebrica mentre, se ω_1, ω_2 sono incommensurabili, e' una curva trascendente che praticamente riempie il rettangolo (66) nel senso che passa infinite volte entro ogni cerchio, di raggio arbitrariamente piccolo, avente il centro in un punto qualsiasi di detto rettangolo.

Del resto, com'e' noto dalla Fisica, le traiettorie in questione si possono rendere visibili componendo col metodo di Lissajous le vibrazioni di due diapason avvenenti in direzioni ortogonali e le cui costanti di frequenza ω_1, ω_2 soddisfino la (67) od abbiamo il rapporto voluto.

22. - Moti elicoidali.

Come esempio di moto non piano, considereremo qui infine il moto composto (n. 5) di un moto circolare, svolgentesi su di un

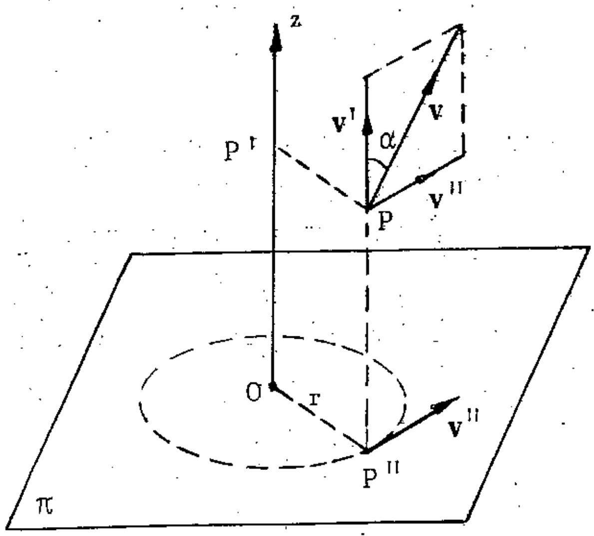


Fig. 28