Capitolo II

Cinematica del Punto

Il moto di un punto P al variare del tempo t viene descritto da una funzione che supponiamo almeno continua

$$\vec{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

di t a valori in $\mathbb{R}^3$. Il tempo t appartiene ad un intervallo della retta reale che contiene il tempo iniziale t_0 (quasi sempre $t_0 = 0$). La *traiettoria* o *orbita* è la curva in $\mathbb{R}^3$ descritta dal punto P. Analiticamente essa è data dalle equazioni parametriche

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t). \tag{II.1}$$

Tali equazioni si dicono *equazioni del moto* del punto P. Il moto si dice *piano* se la traiettoria è contenuta in un piano in $\mathbb{R}^3$. Il moto si dice invece *rettilineo* se la traiettoria è contenuta in una retta.

Spesso conviene considerare nota la traiettoria, analiticamente per il tramite delle equazioni parametriche. In tal caso si esprime la posizione di P nella lunghezza s dell'arco P_0P, misurata a partire da una posizione P_0 prefissata ad arbitrario ($P_0 = P(t_0)$). Il moto di P risulta definito da un'unica equazione

$$s = s(t),$$

che si chiama *equazione oraria* del moto. Il grafico della funzione $s = s(t)$ con il tempo t come ascissa e il parametro s come ordinata si chiama *diagramma orario* del moto.

In questo capitolo studiamo il moto di un punto e in particolare la velocità e l'accelerazione del punto al variare del tempo t. I risultati ottenuti vengono poi applicati ai moti centrali, armonici ed armonici smorzati.

1 Velocità

a. Moto uniforme. Supponendo che la lunghezza $s = s(t)$ dell'arco lungo la traiettoria, percorsa dal punto P a partire dalla sua posizione iniziale P_0, sia proporzionale a t, otteniamo il cosiddetto *moto uniforme*. In tal caso si ha

$$s(t) = v(t - t_0),$$

dove la costante di proporzionalità v si chiama *velocità*. Si osservi che un moto uniforme non è necessariamente rettilineo: Il moto apparente del Sole e il moto delle lancette dell'orologio sono ambedue uniformi e non rettilinei.

b. Velocità scalare. Generalizziamo ora la definizione di velocità. Fissiamo due istanti t e $t+\Delta t$ e sia Δs la lunghezza d'arco percorso da P nell'intervallo di tempo Δt. La velocità media è data dal rapporto $(\Delta s/\Delta t)$. La *velocità scalare* $\dot{s}(t)$ all'istante t viene definita dal limite

$$\dot{s}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

I moti uniformi sono quelli per cui la velocità scalare è costante: $\dot{s}(t) \equiv v$. Il valore assoluto $|\dot{s}(t)|$ si chiama *velocità intensiva* all'istante t.

c. Velocità vettoriale. Invece di limitarci alla traiettoria e non renderci conto dello spazio ambiente, definiamo la velocità del punto P rispetto allo spazio ambiente. A tal fine consideriamo lo spostamento del punto P nello spazio ambiente $\mathbb{R}^3$. Si dice che il moto ha *velocità vettoriale costante* se, fissati due istanti t e $t + \Delta t$, il vettore

$$\boldsymbol{v} = \frac{\vec{x}(t+\Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} = \left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}\right)$$

è costante. In tal caso

$$s(t) = \|\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)\| = \sqrt{(x(t) - x(t_0))^2 + (y(t) - y(t_0))^2 + (z(t) - z(t_0))^2},$$

e quindi la velocità scalare è il modulo della velocità vettoriale: $v = \|\boldsymbol{v}\|$.

In generale, definiamo la velocità vettoriale $\boldsymbol{v}$ nel seguente modo:

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{x}(t+\Delta t) - \boldsymbol{x}(t)}{\Delta t}.$$

Calcolando il limite componente per componente, otteniamo

$$\boldsymbol{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)),$$

dove

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t},$$
$$v_y(t) = \dot{y}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t},$$
$$v_z(t) = \dot{z}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}.$$

d. Legame tra velocità scalare e velocità vettoriale. Abbiamo

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\dot{s}(t) = \dot{s}(t)\boldsymbol{t}, \tag{II.2}$$

dove $\boldsymbol{t}$ è il versore tangente alla traiettoria. In altre parole, la velocità vettoriale è uguale alla velocità scalare per il versore tangente. In generale, la velocità scalare ed il versore tangente dipendono ambedue dal tempo t. È facile vedere dalla (II.2) che il moto ha velocità vettoriale costante se e solo se esso è uniforme e rettilineo.

2 Accelerazione

a. Moto uniformemente vario. Il moto di un punto P si dice *uniformemente vario* se la sua velocità scalare è una funzione lineare del tempo t. In altre parole, se

$$\dot{s}(t) = at + b, \tag{II.3}$$

dove a e b sono opportune costanti. La costante a si chiama *accelerazione scalare* e la costante b *velocità scalare iniziale* (solitamente si assume $t_0 = 0$). Il moto si dice *accelerato* se $a > 0$ e *ritardato* se $a < 0$. Integrando la (II.3), otteniamo l'equazione oraria del moto:

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c, \tag{II.4}$$

dove la costante c di integrazione è l'ascissa del punto mobile nell'istante $t = 0$. La (II.4) si può scrivere nella seguente forma:

$$s(t) = \frac{1}{2}a\left(t + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{2ac - b^2}{2a}.$$

Di conseguenza, il diagramma orario di un moto uniformemente vario è una parabola, avente l'asse di simmetria parallello all'asse s (essendo la retta $t = -(b/a)$) e volgente la concavità verso s positivo o negativo secondo che $a > 0$ ovvero $a < 0$.

Il primo a studiare sistematicamente il moto uniformemente vario è stato Galileo Galilei (1564-1642). Facendo cadere oggetti diversi dalla torre di Pisa, osservò che tutti gli oggetti cadevano con la stessa accelerazione scalare costante, $g \simeq 9,8\ m/s^2$. In altre parole Galileo capì che la legge matematica esprimente la caduta degli oggetti è la (II.4) con le costanti a, b e c non dipendenti dall'oggetto.

b. Accelerazione scalare. Si definisce l'*accelerazione scalare* come

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t).$$

Cioè, l'accelerazione scalare è la derivata della velocità scalare rispetto al tempo t. Il moto è uniformente vario se e solo se è rettilineo ed ha accelerazione scalare costante.

c. Accelerazione vettoriale. Analogamente alla velocità vettoriale si definisce l'*accelerazione vettoriale* nel seguente modo:

$$\boldsymbol{a}(t) = \dot{\boldsymbol{v}}(t) = \ddot{\boldsymbol{x}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta}.$$

La derivata rispetto al tempo t può essere calcolata componente per componente:

$$\boldsymbol{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t)) = (\dot{v}_x(t), \dot{v}_y(t), \dot{v}_z(t)),$$

dove i pedici x, y e z denotano le componenti lungo i rispettivi assi e

$$\begin{aligned} a_x(t) &= \dot{v}_x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}, \\ a_y(t) &= \dot{v}_y(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{v_y(t+\Delta t) - v_y(t)}{\Delta t}, \\ a_z(t) &= \dot{v}_z(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{v_z(t+\Delta t) - v_z(t)}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Ovviamente, l'accelerazione scalare è data da

$$a(t) = \|\boldsymbol{a}(t)\| = \sqrt{a_x(t)^2 + a_y(t)^2 + a_z(t)^2}.$$

Si vede facilmente che il moto ha accelerazione costante se e solo se il moto è rettilineo e uniformemente vario.

d. Legame tra l'accelerazione scalare e l'accelerazione vettoriale. Il legame tra l'accelerazione scalare e quella vettoriale è una generalizzazione delle (II.2) e viene trovata calcolando la (II.2) rispetto a t. Risulta

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}(t) = \dot{\boldsymbol{v}}(t) &= \ddot{s}(t)\boldsymbol{t} + \dot{s}(t)\dot{\boldsymbol{t}}(t) \\ &= \ddot{s}(t)\boldsymbol{t} + \dot{s}(t)^2 \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} \\ &\overset{(I.7)}{=} \ddot{s}(t)\boldsymbol{t} + \dot{s}(t)^2 k(s)\boldsymbol{n}, \end{aligned}$$

dove $k(s)$ è la curvatura della traiettoria, $\boldsymbol{t}$ è il versore tangente e $\boldsymbol{n}$ è il versore normale principale. Quest'ultima identità può essere scritta nella forma

$$\boldsymbol{a}(t) = \ddot{s}(t)\boldsymbol{t} + k(s)v^2\boldsymbol{n}, \tag{II.5}$$

dove $\ddot{s}(t)$ e $k(s)v^2$ si chiamano rispettativamente *accelerazione tangenziale* e *accelerazione normale* o *accelerazione centripeta.* L'accelerazione vettoriale $\boldsymbol{a}(t)$ appartiene al piano osculatore della traiettoria nel punto $\boldsymbol{x}(t)$. Dalla (II.5) si vede che l'accelerazione è puramente tangenziale se il moto è rettilineo [$k(s)v^2\boldsymbol{n} = \vec{0}$ implica $k(s) = 0$], mentre risulta essere puramente normale se il moto è uniformente vario [$\ddot{s} = 0$].

Esempio II.1 Consideriamo il moto di un punto P descritto dalle equazioni

$$x(t) = \frac{1}{2}(kt - \sin(kt)\cos(kt)), \qquad y(t) = \frac{1}{2}\sin^2(kt), \qquad z(t) = \sin(kt),$$

dove $k > 0$ è una costante. In tal caso la velocità vettoriale è data da

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{k}{2}(1 - \cos^2(kt) + \sin^2(kt)) = k\sin^2(kt), \\ \dot{y}(t) = k\sin(kt)\cos(kt), \\ \dot{z}(t) = k\cos(kt). \end{cases}$$

Quindi

$$v^2 = k^2\left[\sin^4(kt) + \sin^2(kt)\cos^2(kt) + \cos^2(kt)\right] = k^2.$$

Quindi $v(t) \equiv k$. In altre parole, il moto è uniforme e $\ddot{s} = 0$.[1] L'accelerazione vettoriale è data da

$$\ddot{x}(t) = k^2\sin(2kt), \qquad \ddot{y}(t) = k^2\cos(2kt), \qquad \ddot{z}(t) - k^2\sin(kt).$$

Dunque l'accelerazione scalare vale

$$a(t) = \|\boldsymbol{a}(t)\| = k^2\sqrt{1 + \sin^2(kt)}.$$

Poichè $\ddot{s}(t) \equiv 0$, dalla (II.5) ricaviamo $a(t) = k(s)v^2$; quindi

$$k(s) = \sqrt{1 + \sin^2(kt)} = \sqrt{1 + \sin^2(s)}.$$

[1]Si può verificare facilmente quest'ultima equazione. Infatti $s(t) = \int_0^t \sqrt{k^2}\,dt = kt$, $\dot{s}(t) = k$ e $\ddot{s}(t) = 0$.

Esempio II.2 (Traiettoria di un proiettile) Un proiettile viene lanciato all'istante $t = 0$ dalla posizione (x_0, y_0, z_0) con la velocità iniziale $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ sotto l'effetto della gravitazione. In tal caso le componenti dell'accelerazione sono date dalle espressioni

$$\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{y} = 0, \qquad \ddot{z} = -g.$$

Le componenti della velocità hanno la forma

$$\dot{x} = \dot{x}_0, \qquad \dot{y} = \dot{y}_0, \qquad \dot{z} = \dot{z}_0 - gt,$$

mentre la posizione del proiettile è data dalle espressioni

$$x = x_0 + t\dot{x}_0, \quad y = y_0 + t\dot{y}_0, \quad z = z_0 + t\dot{z}_0 - \tfrac{1}{2}gt^2 = z_0 + \frac{\dot{z}_0^2}{2g} - \tfrac{1}{2}g\left(t - \frac{\dot{z}_0}{g}\right)^2.$$

Quindi il moto è piano (nel piano di equazione $\dot{y}_0(x - x_0) = \dot{x}_0(y - y_0)$) per $\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 > 0$ e rettilineo (nella direzione verticale) per $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$. Per $\dot{z}_0 > 0$, l'apice $z = z_0 + \frac{\dot{z}_0^2}{2g}$ della traiettoria viene raggiunto all'istante $t = (\dot{z}_0/g)$, mentre la quota di partenza z_0 viene raggiunta all'istante $t = (2\dot{z}_0/g)$.

Siano $\dot{x}_0 \neq 0$ e $\dot{y}_0 = 0$. In tal caso la traiettoria del proiettile è una parabola nel piano xz di equazione

$$z = z_0 + \frac{\dot{z}_0^2}{2g} - \tfrac{1}{2}g\left(\frac{x - x_0}{\dot{x}_0} - \frac{\dot{z}_0}{g}\right)^2.$$

Infatti, eliminando il tempo t (ponendo $t = [(x - x_0)/\dot{x}_0]$) si ottiene l'equazione della parabola dall'espressione $z = z_0 + \frac{\dot{z}_0^2}{2g} - \frac{1}{2}g\left(t - \frac{\dot{z}_0}{g}\right)^2$. Per $\dot{z}_0 > 0$, il proiettile torna alla stessa quota all'istante $t = (2\dot{z}_0/g)$, trovandosi nel punto di coordinate $([2\dot{x}_0\dot{z}_0/g], 0, z_0)$.

3 Moti Piani e Moti Centrali

Consideriamo ora il moto di un punto P nel piano xy, cioè supponiamo che $z(t) \equiv 0$. Supponiamo inoltre di aver fissato un riferimento cartesiano ortogonale Oxy nel piano del moto. In tal caso possiamo esprimire tutte le quantità nelle coordinate polari definite da

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, & y = r\sin\theta, \\ r = \sqrt{x^2 + y^2}, & \operatorname{tg}\theta = (y/x), \end{cases}$$

dove $r \geq 0$ e θ appartiene ad un intervallo semiaperto di lunghezza 2π (diciamo: $0 \leq \theta < 2\pi$). Convertendo le (II.1) in coordinate polari, otteniamo le *equazioni del moto in coordinate polari*

$$r = r(t), \qquad \theta = \theta(t).$$

Introduciamo il *versore radiale* $\boldsymbol{u}$ ed il *versore trasverso* $\boldsymbol{w}$ (ortogonale al versore $\boldsymbol{u}$) da

$$\boldsymbol{u} = (\cos\theta)\vec{i} + (\sin\theta)\vec{j}, \qquad \boldsymbol{w} = -(\sin\theta)\vec{i} + (\cos\theta)\vec{j}, \tag{II.6}$$

dove $\vec{i}$ e $\vec{j}$ sono i versori degli assi x e y del riferimento fissato Oxy. Allora

$$r\boldsymbol{u} = x\vec{i} + y\vec{j}, \qquad r\boldsymbol{w} = -y\vec{i} + x\vec{j}.$$

Calcolando la derivata della (II.6) rispetto al tempo t si ottiene

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \dot\theta\left\{-(\sin\theta)\vec{i} + (\cos\theta)\vec{j}\right\} = \dot\theta\boldsymbol{w}, \tag{II.7a}$$

$$\dot{\boldsymbol{w}} = -\dot\theta\left\{(\cos\theta)\vec{i} + (\sin\theta)\vec{j}\right\} = -\dot\theta\boldsymbol{u}. \tag{II.7b}$$

Di conseguenza,

$$\boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}(r\boldsymbol{u}) = \dot r\boldsymbol{u} + r\dot{\boldsymbol{u}} = \dot r\boldsymbol{u} + r\dot\theta\boldsymbol{w}. \tag{II.8}$$

Quindi la velocità vettoriale $\boldsymbol{v}$ ha due componenti: la *velocità radiale* $v_r \overset{\text{def}}{=} \dot r$ lungo il versore $\boldsymbol{u}$ e la *velocità trasversa* $r\dot\theta$ lungo il versore $\boldsymbol{w}$. La quantità

$$\omega \overset{\text{def}}{=} \dot\theta$$

si chiama *velocità angolare*. Inoltre, utilizzando l'ortogonalità dei versori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{w}$, troviamo la velocità scalare

$$v = \sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\theta^2}.$$

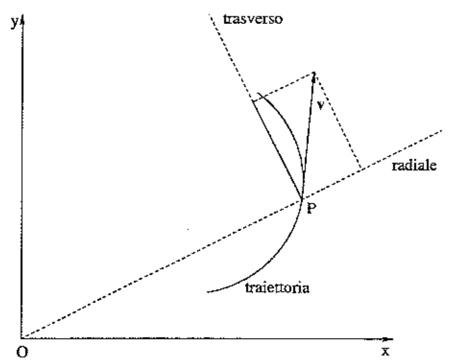

Figura II.1: Moto piano in coordinate polari.

Calcolando la derivata della (II.8) rispetto a t otteniamo la seguente espressione per l'accelerazione vettoriale:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} &= \ddot{r}\boldsymbol{u} + \dot{r}\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{w} + r\ddot{\theta}\boldsymbol{w} + r\dot{\theta}\dot{\boldsymbol{w}} \\ &\overset{\text{(II.7)}}{=} \ddot{r}\boldsymbol{u} + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{w} + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{w} + r\ddot{\theta}\boldsymbol{w} - r\dot{\theta}^2\boldsymbol{u} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{w}. \end{aligned} \tag{II.9}$$

Le componenti di $\boldsymbol{a}$ secondo $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{w}$ si chiamano rispettivamente *accelerazione radiale* e *accelerzione trasversa* e si ha

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}.$$

Mentre il punto P si muove, il raggio vettore OP descrive un'area. Muovendosi da $P = P(t)$ a $P' = P(t + dt)$, il raggio vettore OP non cambia in modo significativo se dt è infinitesimo. Approssimativamente, l'area tracciata dal raggio vettore è l'area del settore circolare di raggio $r = |OP|$ e angolo $d\theta$, cioè

$$dA = \frac{1}{2}r^2\,d\theta = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\,dt.$$

Dunque definiamo la cosiddetta *velocità areale* $\dot{A}$ rispetto al centro O come

$$\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}. \tag{II.10}$$

Deriviamo ora altre due espressioni per la velocità angolare. La prima è la seguente:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - \dot{x}y). \tag{II.11}$$

Infatti, ricordando che $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, risulta

$$\begin{aligned} x\dot{y} - \dot{x}y &= r(\cos\theta)\frac{d}{dt}(r\sin\theta) - r(\sin\theta)\frac{d}{dt}(r\cos\theta) \\ &= r(\cos\theta)\left\{\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\right\} + r(\sin\theta)\left\{\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta\right\} \\ &= r^2\dot{\theta}\left\{\cos^2\theta + \sin^2\theta\right\} + r\dot{r}\left\{\cancel{\sin\theta\cos\theta} - \cancel{\cos\theta\sin\theta}\right\} \\ &= r^2\dot{\theta} = 2\dot{A}, \end{aligned}$$

il che dimostra la (II.11). Ora dimostriamo la seconda espressione

$$\dot{A} = \left\|\frac{1}{2}(P - O) \wedge \boldsymbol{v}\right\|. \tag{II.12}$$

Infatti, poichè $(P-O)=r\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}=\dot{r}\boldsymbol{u}+r\dot{\theta}\boldsymbol{w}$, si ha

$$\begin{aligned}(P-O)\wedge\boldsymbol{v} &= (r\boldsymbol{u})\wedge\left(\dot{r}\boldsymbol{u}+r\dot{\theta}\boldsymbol{w}\right)\\ &= r^2\dot{\theta}(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{w})=2\dot{A}(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{w}),\end{aligned}$$

il che dimostra la (II.12). Il vettore $\frac{1}{2}(P-O)\wedge\boldsymbol{v}$ è ortogonale al piano passante per l'origine e la velocità vettoriale $\boldsymbol{v}$ e ha la velocità areale come la sua lunghezza.

Si noti inoltre che la derivata della velocità areale è legata all'accelerazione trasversa dalla seguente semplice relazione:

$$a_\theta=\frac{2}{r}\ddot{A}.$$

Infatti, derivando la (II.10) si trova

$$\ddot{A}=r\dot{r}\dot{\theta}+\tfrac{1}{2}r^2\ddot{\theta}=\frac{r}{2}(2\dot{r}\dot{\theta}+r^2\ddot{\theta})=\frac{r}{2}a_\theta.$$

Una situazione interessante è quella del cosiddetto *moto centrale*, in cui cioè il moto del punto P è tale che ad ogni istante t l'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$ è diretta verso l'origine O, cioè che ad ogni istante

$$(P-O)\wedge\boldsymbol{a}=\vec{0}.$$

In tal caso

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(P-O)\wedge\boldsymbol{v}\right] &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(r\boldsymbol{u})\wedge\boldsymbol{v}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(\dot{r}\boldsymbol{u}+r\dot{\boldsymbol{u}}\right)\wedge\boldsymbol{v}+\frac{1}{2}\underbrace{(r\boldsymbol{u})\wedge\boldsymbol{a}}_{=\vec{0}}\\ &\overset{\text{(II.7a)}}{=} \frac{1}{2}(\underbrace{\dot{r}\boldsymbol{u}+r\dot{\theta}\boldsymbol{w}}_{=\boldsymbol{v},\ \text{per (II.8)}})\wedge\boldsymbol{v}=\vec{0}.\end{aligned}\tag{II.13}$$

Questa relazione ha due corollari:

a. La lunghezza del vettore $\frac{1}{2}(P-O)\wedge\boldsymbol{v}$, la velocità areale $\dot{A}$, non dipende dal tempo t.

b. Esiste un vettore ortogonale al piano del moto (cioè, ortogonale a $\boldsymbol{v}$ ed a $(P-O)=r\boldsymbol{u}$) che non dipende dal tempo t. Quindi il moto è piano e si svolge nel piano passante per O e ortogonale al vettore $\frac{1}{2}(P-O)\wedge\boldsymbol{v}$.

Concludiamo con la derivazione della formula di Binet. Questo risultato specializzato viene spesso applicato per derivare la prima legge di Keplero.[2]

Teorema II.3 (Formula di Binet) *Se il moto è centrale con velocità areale costante $\dot{A}$, allora l'accelerazione radiale a_r è data dall'espressione*

$$a_r = -\frac{4\dot{A}^2}{r^2}\left\{\frac{1}{r} + \frac{d^2(1/r)}{d\theta^2}\right\}. \tag{II.14}$$

Dimostrazione. Si ricordi che $\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ e quindi $\dot{\theta} = 2\dot{A}/r^2$. Si ha

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{2\dot{A}}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -2\dot{A}\frac{d(1/r)}{d\theta}.$$

Dunque

$$\ddot{r} = -2\dot{A}\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2}\dot{\theta} = -\frac{4\dot{A}^2}{r^2}\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2}.$$

Di conseguenza,

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{4\dot{A}^2}{r^2}\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} - \frac{4\dot{A}^2}{r^3} = -\frac{4\dot{A}^2}{r^2}\left\{\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right\},$$

il che dimostra la (II.14). □

Si noti come, nel caso di moti centrali, la formula (II.15) individua completamente il vettore accelerazione $\boldsymbol{a}$. Infatti, poichè $\ddot{A} = 0$, si ha anche $a_\theta = \frac{2}{r}\ddot{A} = 0$.

Supponiamo che $a_r = -\gamma/r^2$, essendo γ un'opportuna costante positiva. In tal caso la formula di Binet (II.14) implica che

$$\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{\gamma}{4\dot{A}^2}.$$

Quest'equazione differenziale ha la soluzione generale

$$\frac{1}{r(t)} = \frac{\gamma}{4\dot{A}^2} + c_1\cos(\theta - \theta_0),$$

dove c_1 e θ_0 sono opportune costanti. Allora

$$r(t) = \frac{4\dot{A}^2/\gamma}{1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta_0)},$$

dove $\varepsilon = [4c_1\dot{A}^2/\gamma]$ è una costante. Per $\varepsilon = 0$ la traiettoria risulta una circonferenza, per $\varepsilon \in (-1, 1)$ un'ellisse, per $\varepsilon = \pm 1$ una parabola, e per $\varepsilon > 1$ o per $\varepsilon < -1$ un iperbole (discuteremo in modo più dettagliato questo argomento nel Cap. VIII).

[2]Johannes Kepler (1571-1630) pubblicò le cosidette leggi di Keplero in Astronomia Nova (1609).

4 Moti Armonici e Moti Armonici Smorzati

Le equazioni del moto per il *moto circolare uniforme* sono le seguenti:

$$x = R\cos(\omega t), \qquad y = R\sin(\omega t), \qquad z = 0,$$

oppure

$$\boldsymbol{x} = R\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{u} = \cos(\omega t)\boldsymbol{i} + \sin(\omega t)\boldsymbol{j},$$

dove il raggio R e la velocità angolare ω sono costanti positive. In tal caso la velocità e l'accelerazione sono date da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= -\omega R\sin(\omega t)\boldsymbol{i} + \omega R\cos(\omega t)\boldsymbol{j} = \omega R\boldsymbol{w}, \\ \boldsymbol{a} &= -\omega^2 R\cos(\omega t)\boldsymbol{i} - \omega^2 R\sin(\omega t)\boldsymbol{j} = -\omega^2\boldsymbol{x} = -\omega^2 R\boldsymbol{u}. \end{aligned}$$

Il moto armonico viene descritto dall'equazione del moto

$$x(t) = R\cos(\omega t + \theta_0),$$

dove R e ω sono opportune costanti positive e θ_0 è un'opportuna costante reale. Un tale moto è periodico nel senso che

$$x(t+T) \equiv x(t),$$

dove il periodo $T = (2\pi/\omega)$, $1/T$ si dice *frequenza* e ω si chiama *velocità angolare* o *frequenza angolare.* L'equazione del moto è soluzione unica dell'equazione differenziale

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

sotto le condizioni iniziali

$$x(0) = R\cos\theta_0, \qquad \dot{x}(0) = -\omega R\sin\theta_0.$$

Esistono numerosi applicazioni concrete del moto armonico. Un'interessante applicazione è il moto della molla in assenza di attrito descritta dall'equazione differenziale

$$\ddot{x}(t) = -kx(t),$$

dove k è un'opportuna costante positiva (la costante di elasticità della molla). La sua soluzione generale è data da

$$x(t) = x(0)\cos(t\sqrt{k}) + \dot{x}(0)\frac{\sin(t\sqrt{k})}{\sqrt{k}}.$$

Un'altra applicazione si trova nello studio dei circuiti LC (essendo C un condensatore e L un induttore). La carica elettrica sul condensatore verifica l'equazione differenziale

$$\ddot{Q}(t) + LCQ(t) = 0.$$

La soluzione generale di quest'ultima equazione differenziale ha la forma

$$Q(t) = Q(0)\cos(t\sqrt{LC}) + I(0)\frac{\sin(t\sqrt{LC})}{\sqrt{LC}},$$

dove $Q(0)$ è la carica iniziale e $I(0) = \dot{Q}(0)$ è la corrente iniziale che passa per il circuito.

In molte applicazioni il moto armonico viene smorzato. Per esempio, la molla è sottoposta ad una forza d'attrito proporzionale alla velocità che ha l'effetto di ridurre l'ampiezza delle oscillazioni. Un altro esempio è l'analisi di un circuito RLC contenente un capacitore, un induttore ed un resistore. In tal caso la carica $Q(t)$ sul condensatore verifica l'equazione differenziale

$$\ddot{Q}(t) + RC\dot{Q}(t) + LCQ(t) = 0,$$

dove L, R e C sono opportune costanti positive (induttanza, resistenza e capacità).

In generale, l'equazione del moto armonico smorzato è un'equazione differenziale del seguente tipo:

$$\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = 0,$$

dove k e b sono opportune costanti positive. Sostituendo $x = e^{\lambda t}$ arriviamo alla cosiddetta equazione caratteristica

$$\lambda^2 + b\lambda + k = 0. \tag{II.15}$$

Si possono presentare tre casi a seconda che l'equazione (II.15) ammetta radici

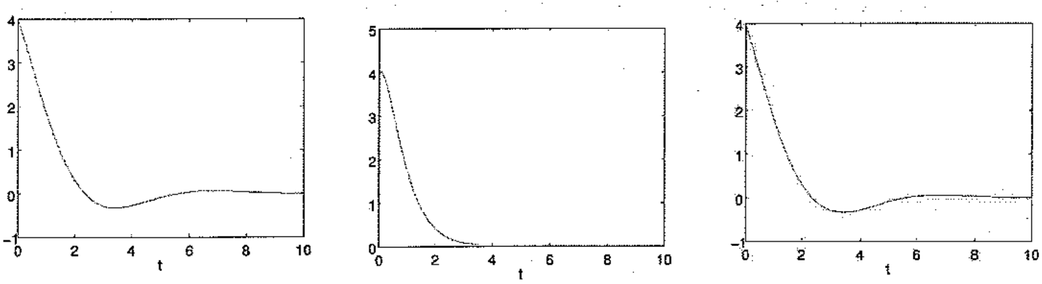

Figura II.2: Grafici delle funzioni $x(t)$ per $k = 1$, $x(0) = 2$ e $\dot{x}(0) = 1$ nei casi $b = 1$, $b = 2$ e $b = 3$.

complesse coniugate, una radice reale con molteplicità algebrica due o due radici reali distinte. Più precisamente, si ha:

a. $0 < b^2 < 4k$. In tal caso la (II.15) ha due zeri complessi coniugati, $\lambda = -\frac{b}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4k - b^2}$. La soluzione ha la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-bt/2}\left[x(0)\left\{\cos(\gamma t) + \frac{b}{2\gamma}\sin(\gamma t)\right\} + \frac{\dot{x}(0)}{\gamma}\sin(\gamma t)\right] \\ &= \underbrace{e^{-bt/2}\sqrt{x(0)^2 + \left[\frac{bx(0) + 2\dot{x}(0)}{2\gamma}\right]^2}}_{\text{ampiezza}}\cos(\gamma t + \phi), \end{aligned}$$

dove $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{4k - b^2}$ e la fase ϕ viene specificato da

$$\begin{aligned} \cos\phi &= \frac{2\gamma x(0)}{\sqrt{4\gamma^2 x(0)^2 + [bx(0) + 2\dot{x}(0)]^2}}, \\ \sin\phi &= \frac{-[b + 2\dot{x}(0)]}{\sqrt{4\gamma^2 x(0)^2 + [bx(0) + 2\dot{x}(0)]^2}}. \end{aligned}$$

La funzione $x(t)$ ha infiniti zeri agli istanti t per cui

$$\tan(\gamma t) = \frac{-2\gamma x(0)}{bx(0) + 2\dot{x}(0)}.$$

Dunque la funzione $x(t)$ è oscillatoria con un'ampiezza che tende a zero.

b. $b^2 = 4k > 0$. In tal caso la (II.15) ha il singolo zero doppio $\lambda = -(b/2)$. La soluzione ha la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0)\left(1 + \frac{bt}{2}\right)e^{-bt/2} + \dot{x}(0)te^{-bt/2} \\ &= e^{-bt/2}\left\{\dot{x}(0) - \frac{bt}{4}[bx(0) + 2\dot{x}(0)]\right\}. \end{aligned}$$

La funzione $x(t)$ ha un singolo zero all'istante

$$t = \frac{-2x(0)}{bx(0) + 2\dot{x}(0)}.$$

c. $b^2 > 4k > 0$. In tal caso ci sono due zeri reali, $\lambda = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4k}$, ambedue negativi. La soluzione ha la forma

$$x(t) = e^{-bt/2}\left[x(0)\left\{\cosh(\gamma t) + \frac{b}{2\gamma}\sinh(\gamma t)\right\} + \frac{\dot{x}(0)}{\gamma}\sinh(\gamma t)\right],$$

dove $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4k}$. La funzione $x(t)$ ha un singolo zero all'istante t per cui

$$\tanh(\gamma t) = \frac{-2\gamma x(0)}{bx(0) + 2\dot{x}(0)},$$

purché valga la disuguaglianza $2\gamma|x(0)| < |bx(0) + 2\dot{x}(0)|$. Nel caso contrario la funzione $x(t)$ non ha zeri.