Qui $\vec{\infty}$ sta ad indicare che tutte e 3 le componenti di $\vec{y}(x)$ tendono ad un ∞. Analoghi teoremi valgono per $x \to x_0^+$ oppure per $x \to x_0^-$ oppure $x \to +\infty$ oppure $x \to -\infty$.
La dimostrazione consiste semplicemente nel notare che per ogni componente l' enunciato si riduce al teorema giá noto.

11 CINEMATICA.

La cinematica é la parte della Meccanica che studia il moto dei corpi indipendentemente dalle cause che lo determinano. Un concetto indispensabile a questo fine é quello del tempo, che indicheremo con t. L' origine di questo concetto é dovuta alla capacitá di ogni osservatore di ordinare le proprie sensazioni attribuendo un significato preciso ai concetti di anteriore, simultaneo e posteriore. Sussiste il seguente Assioma di "tempo assoluto":
"Esiste un tempo unico per tutti gli osservatori, qualunque sia il loro stato di quiete o di moto relativo".
Questo va aggiunto all' assioma per lo spazio fisico, giá introdotto prima. L' assioma del tempo assoluto verrá poi confutato in Relativitá.

12 Cinematica del punto.

Dicesi "punto materiale" un corpo fisico le cui dimensioni trasversali non influenzano il suo movimento. Il moto di un punto é noto allorché si conosce la legge
1)$P = P(t)$ che ad ogni istante t associa la posizione di P in quell' istante; tale legge é anche chiamata "Equazione finita del moto di P" e le sue componenti $x^i = x^i(t)$ diconsi equazioni cartesiane finite del moto di P. La 1) rappresenta anche una curva γ chiamata "traiettoria"; se ne cerchiamo l' ascissa curvilinea $s = s(t)$, la 1) equivale a

$$2)\begin{cases} P = P(s) \\ s = s(t) \end{cases}.$$

La prima di queste é la traiettoria espressa con l' ascissa curvilinea, mentre la seconda é nota come "legge o equazione oraria" del moto di P su γ ed il suo diagramma in un piano cartesiano ts, dicesi "diagramma orario" del moto di P su γ.

Definizione di velocitá ed accelerazione.
Il rapporto incrementale $\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}$ prende il nome di "velocità vettoriale media" di P; il

suo limite per Δt che tende a zero, cioé

$$\vec{v} = \dot{P}$$

prende il nome di "velocitá vettoriale". Si noti che, la derivata rispetto al tempo viene indicata con un punto sopra la funzione da derivare; in seguito vedremo due punti, quando si vorrá indicare la derivata seconda, etc.

· Il rapporto incrementale $\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$ prende il nome di "velocità scalare media" di P; il suo limite per Δt che tende a zero, cioé

$\dot{s}$ prende il nome di "velocitá scalare".

· Il rapporto incrementale $\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}$ prende il nome di "accelerazione vettoriale media" di P; il suo limite per Δt che tende a zero, cioé

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{P}$$

prende il nome di "accelerazione vettoriale".

· Il rapporto incrementale $\frac{\dot{s}(t+\Delta t)-\dot{s}(t)}{\Delta t}$ prende il nome di "accelerazione scalare media" di P; il suo limite per Δt che tende a zero, cioé

$\ddot{s}$ prende il nome di "accelerazione scalare".

Poiché $P = P[s(t)]$ ne segue $\dot{P} = \frac{\partial P}{\partial s}\dot{s} = \vec{t}\dot{s}$, cioé

$$\vec{v} = \dot{s}\,\vec{t}, \tag{12}$$

che dá la relazione tra velocitá vettoriale e velocitá scalare; il suo modulo ci dá $|\dot{s}| = |\vec{v}|$. Inoltre si vede da (12) che la velocitá $\vec{v}$ é tangente alla traiettoria. Derivando la (12) di nuovo, si trova $\vec{a} = \ddot{s}\vec{t} + \dot{s}\frac{d\vec{t}}{ds}\frac{ds}{dt}$ che, per la prima formula di Frenèt, diviene

$$\vec{a} = \ddot{s}\,\vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\,\vec{n}. \tag{13}$$

Pertanto l' accelerazione scalare é la componente dell' accelerazione vettoriale lungo la tangente; essa é anche chiamata "accelerazione tangenziale" e questo nome viene anche dato ad $\ddot{s}\,\vec{t}$. L' altro termine $\frac{\dot{s}^2}{\rho}\,\vec{n}$ che compare nell' espressione di $\vec{a}$ é detto "accelerazione normale o centripeta", nome che viene anche dato al suo modulo $\frac{\dot{s}^2}{\rho}$.

Ulteriori definizioni e proprietá.

· Il moto di P si dice "progressivo" se $\dot{s} > 0$, "retrogrado" se $\dot{s} < 0$.

· Se per un certo t si ha $\dot{s}(t) = 0$, allora t é chiamato "istante di arresto".

· Se $\dot{s}(t)$ é costante, allora il moto di P é detto "uniforme".

Ovviamente il moto é uniforme se e solo se $\ddot{s}(t) = 0$.

· Il moto di P si dice rettilineo se la sua traiettoria é una retta, si dice piano se la sua traiettoria sta su un piano.

· Se $\vec{v}(t)$ é costante, allora il moto di P é rettilineo ed uniforme.

· Se $|\ \dot{s}(t)\ |$ é crescente, il moto di P si dice "accelerato all' istante t"; se invece é decrescente, si dice "ritardato all' istante t".

Ovviamente, se $|\ \dot{s}(t)\ | \neq 0$ il moto é accelerato se e solo se $\dot{s}(t)\ddot{s}(t) > 0$ ed é ritardato se e solo se $\dot{s}(t)\ddot{s}(t) < 0$.

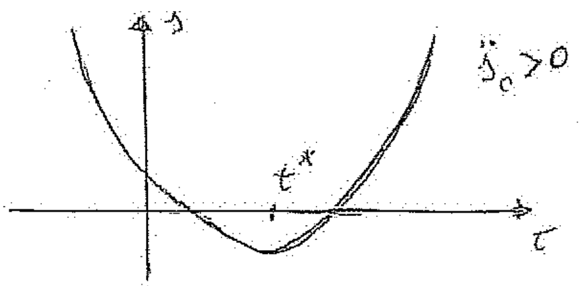
· Se $\dot{s}(t)$ non é costante, il moto di P si dice "vario".

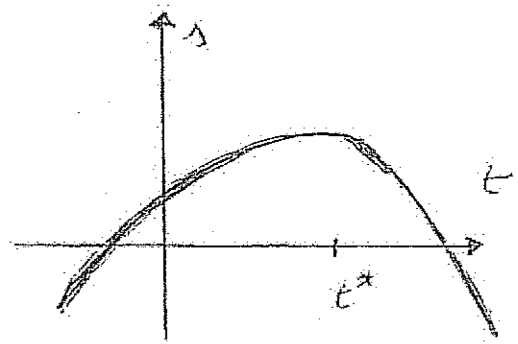
· Se $\ddot{s}(t)$ é costante, il moto di P si dice "uniformemente vario".

Da $\ddot{s}(t) = \ddot{s}_0$, integrando si trova

$$s(t) = \ddot{s}_0 \frac{1}{2} t^2 + \dot{s}_0 t + s_0$$

ed il diagramma orario é





con $t^* = -\frac{\dot{s}_0}{\ddot{s}_0}$. Dunque, nel moto uniformemente vario, se $\ddot{s}_0 > 0$ il punto proviene da $s = +\infty$ e si muove di moto ritardato retrogrado fino all' istante t^* dopo di che ritorna donde era venuto con moto accelerato progressivo. Se invece $\ddot{s}_0 < 0$, il punto proviene da $s = -\infty$ e si muove di moto ritardato progressivo fino all' istante t^* dopo di che ritorna donde era venuto con moto accelerato retrogrado.

Dalla (13) seguono anche le proprietá:

· "L' accelerazione vettoriale $\vec{a}(t)$ é parallela al piano osculatore della traiettoria nel suo punto $P(t)$ ed é rivolto dalla parte in cui essa volge la concavitá".

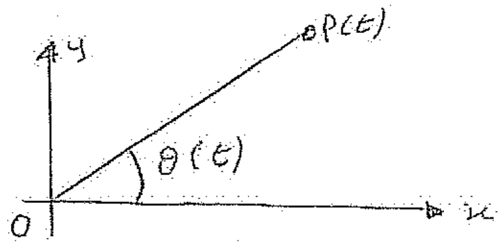
· "L' accelerazione vettoriale é ad ogni istante puramente normale solo nei moti uniformi; é invece ad ogni istante puramente tangenziale solo nei moti rettilinei".

- "L' accelerazione vettoriale é nulla in ogni istante solo nei moti rettilinei uniformi".

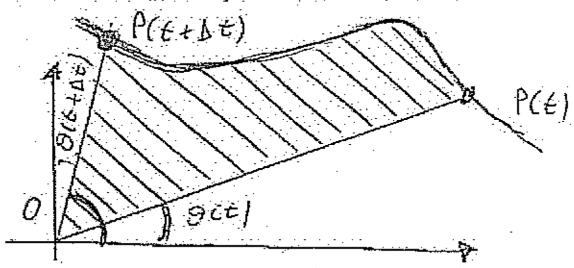
13 MOTI PIANI.

Nel caso di moto piano si definiscono anche le seguenti velocitá:

Velocitá angolare: Sia $\vartheta(t)$ l' angolo che $P(t) - O$ forma con l' asse delle x. Il rapporto incrementale $\frac{\vartheta(t+\Delta t)-\vartheta(t)}{\Delta t}$ prende il nome di "velocità angolare media" di P; il suo limite per Δt che tende a zero, cioé $\omega = \dot{\vartheta}$ prende il nome di "velocitá angolare" di P.



Velocitá areale: Sia $A(t+\Delta t) - A(t)$ l' area della figura delimitata dalla parte di traiettoria compresa tra $P(t)$ e $P(t+\Delta t)$, e dai segmenti $P(t) - O$ e $P(t+\Delta t) - O$; Il rapporto incrementale $\frac{A(t+\Delta t)-A(t)}{\Delta t}$ prende il nome di "velocità areale media" di P; il suo limite per Δt che tende a zero prende il nome di "velocitá areale" di P.



Per calcolarla, sia $\rho(t) =| P(t) - O |$; nell' intervallo $[t, t+\Delta t]$ questa funzione assume un minimo ρ_1 ed un massimo ρ_2 e si ha che $A(t+\Delta t) - A(t)$ é compresa tra le aree dei settori circolari di angolo $\vartheta(t+\Delta t) - \vartheta(t)$ e raggi ρ_1 e ρ_2 rispettivamente; dividendo per Δt si ha

$$\frac{1}{2}\rho_1^2 \frac{\vartheta(t+\Delta t)-\vartheta(t)}{\Delta t} \leq \frac{A(t+\Delta t)-A(t)}{\Delta t} \leq \frac{1}{2}\rho_2^2 \frac{\vartheta(t+\Delta t)-\vartheta(t)}{\Delta t}$$

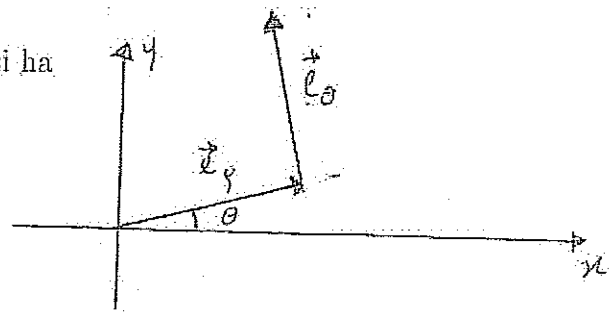
Facendo il limite per Δt che tende a zero, sia ρ_1 che ρ_2 tendono a $\rho(t)$ per cui, nella diseguaglianza trovata, sia 1° che 3° membro tendono al valore $\frac{1}{2}\rho^2(t)\,\dot{\vartheta}(t)$. Ne segue che la velocitá areale é

$$\dot{A} = \frac{1}{2}\rho^2 \cdot \dot{\vartheta}.$$

Possiamo utilizzare le coordinate polari. Chiamiamo $\vec{e}_\rho \equiv (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ ed $\vec{e}_\vartheta = \frac{d}{d\vartheta}\vec{e}_\rho \equiv (-\sin\vartheta, \cos\vartheta)$. Poiché $\vec{e}_\rho$ é di modulo costante, allora $\vec{e}_\vartheta \cdot \vec{e}_\rho = 0$. Si vede pure che $\frac{d}{d\vartheta}\vec{e}_\vartheta = -\vec{e}_\rho$.

Da $P - O = \rho\vec{e}_\rho$ derivando rispetto al tempo, si ha

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\vec{e}_\rho}{d\vartheta}\dot{\vartheta} \quad \text{ovvero}$$
$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta$$



che é l' espressione della velocitá in coordinate polari. Derivando di nuovo ho

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\,\frac{d\vec{e}_\rho}{d\vartheta}\,\dot{\vartheta} + \dot{\rho}\,\dot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta + \rho\,\ddot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta + \rho\,\dot{\vartheta}\,\frac{d\vec{e}_\vartheta}{d\vartheta}\,\dot{\vartheta} \quad \text{ovvero}$$
$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\vartheta}^2)\,\vec{e}_\rho + (\rho\,\ddot{\vartheta} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\vartheta})\,\vec{e}_\vartheta$$

che é l' espressione dell' accelerazione in coordinate polari.
Si noti che $(P-O) \wedge \vec{v} = \rho\vec{e}_\rho \wedge (\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta) = \rho^2\dot{\vartheta}\vec{k}$;
pertanto, la componente lungo l' asse z di $\frac{1}{2}(P-O) \wedge \vec{v}$ é la velocitá areale.
$\vec{e}_\rho$ viene chiamato versore radiale,
$\vec{e}_\vartheta$ viene chiamato versore trasverso,
$\vec{v} \cdot \vec{e}_\rho = \dot{\rho}$ viene chiamato velocitá radiale,
$\vec{a} \cdot \vec{e}_\rho = \ddot{\rho} - \rho\,\dot{\vartheta}^2$ viene chiamato accelerazione radiale,
$\vec{v} \cdot \vec{e}_\vartheta = \rho\dot{\vartheta}$ viene chiamato velocitá trasversa,
$\vec{a} \cdot \vec{e}_\vartheta = \rho\,\ddot{\vartheta} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\vartheta} = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\vartheta})$ viene chiamato accelerazione trasversa.

Moto circolare

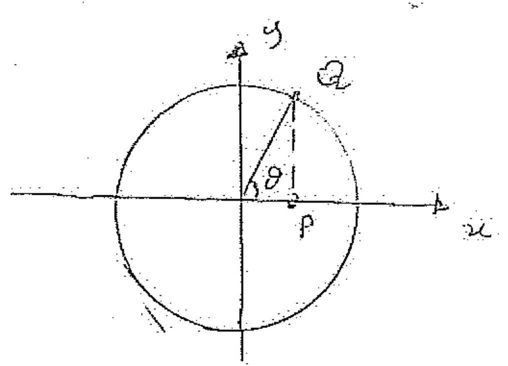
E' il moto di un punto la cui traiettoria é una circonferenza. Preso il suo centro come origine ed introdotte coordinate polari, valgono le formule di sopra con coordinate polari ed inoltre con $\rho = R$ costante; perciò si ha

$$\vec{v} = R\,\dot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta \qquad \text{ed} \qquad \vec{a} = R\,\ddot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta - R\,\dot{\vartheta}^2\,\vec{e}_\rho\,.$$

Queste possono essere ottenute anche da (12), (13) tenendo conto di $s = R\vartheta$.
Pertanto, in un moto circolare, il modulo della velocitá é ωR, l' accelerazione é $\dot{\omega}R$ e l' accelerazione centripeta é $-R\,\dot{\vartheta}^2 = -\omega^2 R = -\frac{v^2}{R}$.
Ne segue che il moto circolare é uniforme se e solo se la velocitá angolare é costante; in tal caso l' accelerazione tangenziale é nulla e rimane solo quella centripeta.
Inoltre, ogni moto circolare uniforme di velocitá angolare ω é periodico di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
Infatti, da $P(t) \equiv (R\cos\omega t\,,\, R\sin\omega t)$ segue che $P(t+hT) = P(t)\;\forall\, t$ e per ogni h intero.

Moto armonico:

Si dice armonico il moto di un punto P se esiste un altro punto Q che si muove di moto circolare uniforme e se la sua proiezione ortogonale su un diametro fisso d della circonferenza γ su cui si muove é proprio P.



Preso d come asse delle x ed il centro O di γ come origine, si vede che $P - O = x\vec{i}$ ed $x = R\cos\vartheta(t)$ con $\vartheta(t) = \omega t + \delta$ da cui

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 . \tag{14}$$

Questa viene chiamata "equazione dei moti armonici" perché, viceversa, da essa segue

$$x = R\cos(\omega t + \delta) ,$$

con R e δ costanti di integrazione. ω viene anche chiamato "pulsazione". Il moto é poi periodico di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Il numero $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ é la frequenza ed individua il numero di periodi nell' unitá di tempo. R é l' ampiezza.

Moti composti:

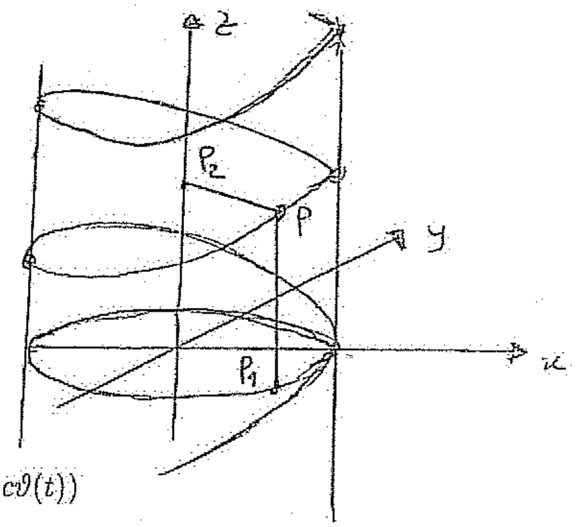
"Il moto del punto P dicesi "composto" dei moti degli n punti P_i (e tali moti diconsi "moti componenti" del moto di P) se

$$P - O = \sum_{i=1}^{n} [P_i(t) - O] \text{ "} .$$

Ovviamente questa definizione dipende da O.

Moto elicoidale:

"Il moto di un punto P si dice elicoidale se la traiettoria di P é un' elica cilindrica".
Si ha la proprietá: "Il moto di P é elicoidale se e solo se



1. é composto del moto circolare di un punto P_1 e del moto rettilineo di un punto P_2 avente luogo sulla retta ortogonale al piano della circonferenza e passante per il suo centro,

2. il rapporto $\frac{|\vec{v}_1|}{|\vec{v}_2|}$ é costante".

Infatti, se il moto di P é elicoidale, si ha

$$P(t) \equiv (R\cos\vartheta(t)\, , \, R\sin\vartheta(t)\, , \, c\vartheta(t))$$

che é composto dei moti di

$$P_1(t) \equiv (R\cos\vartheta(t)\, , \, R\sin\vartheta(t)\, , \, 0) \quad \text{e} \quad P_2(t) \equiv (0\, , 0\, , c\vartheta(t))$$

$$\text{e} \qquad \frac{|\vec{v}_1|}{|\vec{v}_2|} = \frac{|R\dot{\vartheta}|}{|c\dot{\vartheta}|} = \frac{R}{|c|}.$$

Viceversa, da

$$P_1(t) \equiv (R\cos\vartheta(t)\,,\, R\sin\vartheta(t)\,,\, 0) \quad \text{e} \quad P_2(t) \equiv (0\,,\, 0\,,\, z(t)) \quad \text{e da} \quad \frac{|\vec{v}_1|}{|\vec{v}_2|} = \text{cost}\,,$$

cioé $\frac{|R\dot{\vartheta}|}{|\dot{z}|} = \text{cost}$ segue $\dot{z} = \frac{R}{k}\dot{\vartheta}$ da cui $z(t) = \frac{R}{k}\vartheta +$ cost e

$$P - O = P_1 - O + P_2 - O \equiv \left(R\cos\vartheta(t)\,,\, R\sin\vartheta(t)\,,\, \frac{R}{k}\vartheta + \text{cost} \right)\,, \tag{15}$$

che é elicoidale. Si ha il

TEOREMA :"Il moto di un punto P è elicoidale uniforme se e solo se ciascuno dei moti componenti é uniforme".

Infatti, da (15) segue $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ e si ha $\frac{|\vec{v}_1|}{|\vec{v}_2|} = \text{cost}$, $|\vec{v}_1 + \vec{v}_2| = \text{cost}$; queste sono soddisfatte se e solo se $|\vec{v}_1| = \text{cost}$ e $|\vec{v}_2| = \text{cost}$. (Per la dimostrazione si ricordi che $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ per cui $|\vec{v}_1 + \vec{v}_2| = \sqrt{|\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2}$).