1 Spazi vettoriali

Siano dati un insieme V ed un corpo K. Si dice che V é uno spazio vettoriale sul corpo K se sono definite due operazioni, una di somma tra elementi di V ed una di prodotto tra un elemento di K ed uno di V, entrambe a valori in V, tali che le seguenti proprietá siano soddisfatte

$$\begin{cases} \vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u} & \text{(Proprietá commutativa)} \\ (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) & \text{(Proprietá associativa)} \\ \exists\vec{0}\epsilon V:\vec{0}+\vec{u}=\vec{u} & \text{(Esistenza dello zero)} \\ \forall\vec{u}\epsilon V, \exists\vec{u}\,'\epsilon V:\vec{u}+\vec{u}\,'=\vec{0} & \text{(Esistenza dell' opposto).} \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} 1\vec{u}=\vec{u} & \text{(Unitá di } K \text{ per elemento di } V\text{)} \\ a(b\vec{u})=(ab)\vec{u} & \text{(Proprietá associativa del prodotto esterno)} \\ (a+b)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u} & \text{(Proprietá distributiva).} \end{cases} \tag{1.2}$$

Queste proprietà valgono ovviamente $\forall\vec{u}, \vec{v}$ appartenenti a V ed a, b appartenenti a K; inoltre 1 é l' unitá di K. Casi significativi sono quelli con K corpo dei numeri complessi e con K corpo dei numeri reali. L' elemento $\vec{u}\,'$ di cui sopra viene anche indicato con $-\vec{u}$. La somma $\vec{u}+(-\vec{v})$ viene anche indicata con $\vec{u}-\vec{v}$ e chiamata differenza di $\vec{u}$ e di $\vec{v}$. Gli elementi di V vengono chiamati vettori. Il vettore $\vec{u}$ si dice parallelo al vettore $\vec{v}$ se esiste $m\epsilon K$ tale che $\vec{u}=m\vec{v}$; se K è il corpo dei numeri reali, i due vettori si dicono paralleli e concordi se $m\geq 0$, paralleli e discordi se $m\leq 0$.

Le seguenti proprietà sono conseguenza delle precedenti:

- Lo zero di V e l' opposto di $\vec{u}$ sono unici,
- $0\vec{u}=\vec{0}$, $a\vec{0}=\vec{0}$, $(-1)\vec{u}=-\vec{u}$, $a(-\vec{u})=-a\vec{u}$,
- $a\vec{u}=0 \Rightarrow a=0$, oppure $\vec{u}=\vec{0}$,

dove 0 è lo zero di K.

Un esempio di spazio vettoriale è l' insieme $\Re^n$ delle n-uple ordinate di numeri reali

$\vec{u}=(u^1,u^2,\cdots,u^n)$ con somma e prodotto definiti da

$\vec{u}+\vec{v}=(u^1,u^2,\cdots,u^n)+(v^1,v^2,\cdots,v^n)=(u^1+v^1,u^2+v^2,\cdots,u^n+v^n)$

$a\vec{u}=a(u^1,u^2,\cdots,u^n)=(au^1,au^2,\cdots,au^n)$.

Gli n vettori $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\cdots$, $\vec{u_n}$, si dicono linearmente indipendenti se una loro combinazione lineare può dare risultato nullo solo se sono nulli i coefficienti, cioè

$$a^1\vec{u_1}+a^2\vec{u_2}+\cdots+a^n\vec{u_n}=0 \Rightarrow a^1=a^2=\cdots=a^n=0;$$

in caso contrario si dicono linearmente dipendenti. Se esistono n vettori linearmente indipendenti e, comunque ne prendiamo $n+1$, questi risultano linearmente dipendenti, allora si dice che lo spazio vettoriale V ha dimensione finita n. In tal caso, n vettori linearmente indipendenti si chiamano anche base di V; si ha che n vettori costituiscono una base se e solo se ogni vettore si esprime in uno ed un sol modo come loro combinazione lineare. Un esempio di spazio vettoriale con dimensione n è $\Re^n$ ed una sua base é data dai vettori $\vec{e}_i$, la cui unica componente non nulla vale 1 ed é la i-ma.

1.1 Cambiamenti di base.

Siano $\vec{e}_i$ ed $\vec{e}_{i'}$ due basi di uno spazio vettoriale. Ovviamente, $\vec{e}_i$ si potrá esprimere come combinazione lineare degli elementi dell' altra base e viceversa, cioé

$$\vec{e}_i = A_i{}^{i'}\vec{e}_{i'} \quad , \quad \vec{e}_{i'} = A_{i'}{}^{i}\vec{e}_i\,, \tag{1.3}$$

dove si adottata la convenzione di Einstein sugli indici ripetuti, cioé che é sottintesa la sommatoria rispetto a tali indici. Un indice ripetuto dicesi muto e nulla cambia se lo sostituisce con un altro indice, purché questo non compaia giá nell' espressione che si sta considerando; gli indici non muti sono anche detti "liberi". $A_i{}^{i'}$ viene anche chiamata "matrice del cambiamento di base". Sostituendo $(1.3)_2$ nell' eq. $(1.3)_1$ ed uguagliando a $\delta_i^j\vec{e}_j$, si trova che le matrici comparenti in $(1.3)_1$ e $(1.3)_2$ sono l' una l' inversa dell' altra. Per ogni vettore $\vec{v}$, si ha

$$\vec{v} = v^i\vec{e}_i\,, \tag{1.4}$$

ed i coefficienti v^i vengono chiamati "componenti di $\vec{v}$ nella base $\vec{e}_i$". Come cambiano le componenti al variare della base? Sostituendo la $(1.3)_1$ nella (1.4), ed uguagliando a $v^{i'}\vec{e}_{i'}$, si trova

$$v^{i'} = A_i{}^{i'}v^i\,. \tag{1.5}$$

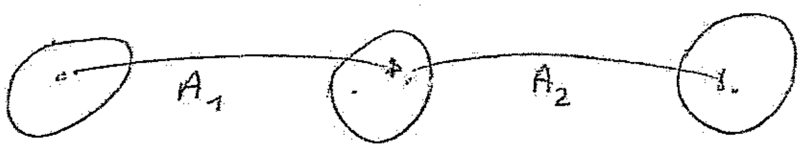
Si noti che la matrice con cui cambiano le componenti $v^{i'}$ non é la stessa di $(1.3)_2$ con cui cambia la base $\vec{e}_{i'}$; invece é la sua inversa, quella che compare in $(1.3)_1$. Per questo motivo l' eq. (1.5) viene chiamata "Legge di Controvarianza" e le suddette componenti v^i vengono dette "componenti controvarianti di

$\vec{v}$. Si puó anche dire che una n-upla di numeri v^i rappresentano le componenti di un vettore $\vec{v}$ in una data base se e solo se, al variare della base, si trasformano con la legge di controvarianza.

1.2 Orientamento.

Diciamo equivalenti due basi se sono legate da una matrice di passaggio con determinante positivo. Si verifica facilmente che questa é una relazione di equivalenza perché soddisfa le proprietá riflessiva, simmetrica e transitiva. Dimostriamo ora che ci sono solo due classi di equivalenza.

Infatti, se ce ne fossero piú di due, possiamo prenderne 3 ed una base in ciascuna di esse; se A_1 ed A_2



sono le matrici di passaggio come in figura, si ha $\det A_1 < 0$, $\det A_2 < 0$ da cui $\det A_2\, A_1 > 0$. Poiché $A_2\, A_1$ é la matrice di passaggio dalla prima alla terza base, ne segue che queste sono equivalenti, contro il fatto che si trovano in classi diverse.

Prendendo una base $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ ed operando una inversione del primo asse, cioé prendendo $\vec{e}'_1 = -\vec{e}_1, \vec{e}'_2 = \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}'_n = \vec{e}_n$, la matrice di passaggio é $\mathrm{diag}(-1, 1, \cdots, 1)$ con determinante -1. Perció si puó passare da una classe di equivalenza all' altra semplicemente invertendo uno degli assi.

Assumendo orientata positivamente una di queste classi, l' altra sará orientata negativamente.

Nello spazio fisico 3-dimensionale si assume orientata positivamente la base che ubbidisce alla regola della mano sinistra: "Se si dispone il pollice della mano sinistra parallelo e concorde ad $\vec{e}_1$, il medio ad $\vec{e}_2$, allora l' indice dovrá essere parallelo e concorde ad $\vec{e}_3$". Una tale base si chiama anche levogira.

Se si inverte il verso del pollice si cambia orientamento e, nello stesso tempo, é soddisfatta la regola precedente ma con la mano destra anziché la sinistra. Una tale base si dice anche destrogira.

Notiamo infine che con una rotazione l' orientamento non cambia; infatti, se essa avviene attorno ad

$\vec{e}_3$, la matrice di passaggio é

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ che ha determinante } 1.$$

Similmente per le rotazioni attorno ad $\vec{e}_2$ e per quelle attorno ad $\vec{e}_1$. Ne segue che anche piú rotazioni successive non fanno cambiare orientamento in quanto la matrice di passaggio é il prodotto delle varie matrici di passaggio. Questo conferma la validitá della regola della mano sinistra (e quella della mano destra), in quanto é sempre possibile mediante al piú 3 rotazioni far diventare il pollice ed il medio paralleli e concordi ad $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ rispettivamente.

1.3 Prodotto scalare.

In uno spazio vettoriale si definisce prodotto scalare pseudoeuclideo una applicazione dal prodotto cartesiano $V \times V$ a valori in $\Re$, ovvero che alla coppia di vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ associa un numero reale che indicheremo con $\vec{u} \cdot \vec{v}$, che soddisfa le seguenti proprietá

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} & \text{(Proprietá commutativa del prodotto scalare)} \\ a(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (a\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (a\vec{v}) & \text{(Proprietá associativa dei prodotti esterno e scalare)} \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} & \text{(Proprietà distributiva del prodotto scalare rispetto alla somma)} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \forall \vec{v} \in V, \Rightarrow \vec{u} = \vec{0} & \text{(Proprietá di non singolaritá).} \end{cases} \tag{1.6}$$

Queste proprietà valgono ovviamente $\forall \vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ appartenenti a V ed a appartenente a $\Re$. In tal caso V viene anche chiamato spazio vettoriale pseudoeuclideo.

Si chiama "matrice della metrica" di uno spazio vettoriale pseudoeuclideo in una sua base $\vec{e}_i$, la matrice che ha come elementi

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j\,. \tag{1.7}$$

Per la prima proprietá del prodotto scalare segue che tale matrice é simmetrica.

Da $\vec{u} = u^i\vec{e}_i$ e $\vec{v} = v^i\vec{e}_i$ segue

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = g_{ij}u^iv^j\,; \tag{1.8}$$

perció, se nota la matrice della metrica, é noto anche il prodotto scalare di due vettori. Applicando la (1.7) con $\vec{v} = \vec{e}_h$, si vede come dalla quarta proprietá del prodotto scalare segue che la matrice della metrica é non singolare. Viceversa, data una matrice g_{ij} simmetrica e non singolare e assumendo la (1.7) come definizione di $\vec{u}\cdot\vec{v}$, si vede che sono soddisfatte le proprietá del prodotto scalare.

Sostituendo la legge di cambiamento di base $(1.3)_1$ nella (1.7) si trova la legge con cui varia la matrice della metrica al variare della base, cioé

$$g_{ij} = A_i{}^{i'} A_j{}^{j'} g_{i'j'} \,. \tag{1.9}$$

Si definisce anche la matrice della metrica con gli indici in alto, come la matrice inversa di g_{ij}, ovvero da

$$g^{ij} g_{jh} = \delta^i_h \,. \tag{1.10}$$

Sostituendo la (1.9) in (1.10) e moltiplicando per $A_i{}^{i'}$, si trova

$$A_i{}^{i'} g^{ij} A_j{}^{j'} A_h{}^{h'} g_{j'h'} = A_h{}^{i'} \,;$$

moltiplicando questa per $B^h_{k'}$, matrice inversa di $A^{\cdot}_{\cdot}$, si trova

$$A_i{}^{i'} g^{ij} A_j{}^{j'} g_{j'k'} = \delta^{i'}_{k'} \,;$$

confrontando questa con l' eq. (1.10), scritta aggiungendo i primi ' ai suoi indici, si trova che

$$g^{h'j'} = A_i{}^{h'} A_j{}^{j'} g^{ij} \,, \tag{1.11}$$

che é la controparte dell' eq. (1.9) ma per la matrice della metrica con gli indici in alto.

Due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ si dicono ortogonali se e solo se $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. Si dice norma del vettore $\vec{u}$ il numero $\| \vec{u} \| = \vec{u}\cdot\vec{u}$. Si dice poi modulo del vettore $\vec{u}$ il numero $| \vec{u} | = \sqrt{|\, \| \vec{u} \| \,|}$, cioé la radice quadrata del valore assoluto della norma.

I prodotti scalari $v_i = \vec{v}\cdot\vec{e}_i$ si dicono componenti covarianti di $\vec{v}$ nella base $\vec{e}_i$. Ovviamente, ne segue

$$v_i = v^j \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i = v^j g_{ij} \,; \tag{1.12}$$

con un cambiamento di base, si ha

$$v_{i'} = \vec{v}\cdot\vec{e}_{i'} = \vec{v}\cdot A_{i'}{}^i \vec{e}_i = v_i A_{i'}{}^i \,.$$

Si noti che la matrice con cui cambiano le componenti $v_{i'}$ é la stessa di $(1.3)_2$ con cui cambia la base $\vec{e}_{i'}$. Per questo motivo le componenti v_i vengono dette "componenti covarianti di $\vec{v}$.

Basi ortonormali.

I vettori $\vec{e}_i$, per $i = 1, ..., m$ si dicono ortonormali se $| \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j |= \delta_{ij}$. Ne segue che tali vettori sono linearmente indipendenti; infatti, da $a^i \vec{e}_i = 0$, moltiplicando scalarmente per $\vec{e}_j$, si ha $0 = \pm a^i \delta_{ij} = \pm a^j$. Ne segue che n vettori ortonormali formano una base. Dall' eq. (1.11) segue poi che, in una base ortonormale $v_i = \pm v^i$. Partendo da una base ortonormale, a meno di scambi di posto tra i suoi vettori, si può fare in modo che i primi suoi r vettori hanno norma 1 ed i rimanenti hanno norma -1. In tal modo il prodotto scalare di 2 vettori é la somma dei prodotti delle loro prime r componenti corrispondenti, diminuita della somma dei prodotti delle loro ultime $n - r$ componenti corrispondenti. La norma di un vettore é la somma dei quadrati delle sue prime r componenti, diminuita della somma dei quadrati delle sue ultime $n - r$ componenti. Possiamo ora dimostrare che il numero r non dipende dalla base prescelta; se infatti supponiamo per assurdo che nella base ortonormale $\vec{e}_{i'}$ si abbia $r' > r$, possiamo trovare un vettore non nullo $\vec{u}$ che ha le sue prime r componenti nella base $\vec{e}_i$ nulle, e le sue ultime $n-r'$ componenti nella base $\vec{e}_{i'}$ nulle (infatti questo equivale ad imporre $r+n-r' < n$ equazioni lineari omogence in n incognite). Allora nella base $\vec{e}_i$ si avrebbe $\| \vec{u} \| \leq 0$, mentre nella base $\vec{e}_{i'}$ si avrebbe $\| \vec{u} \| \geq 0$, per cui $\| \vec{u} \| = 0$, e questo nella base $\vec{e}_i$ implicherebbe $\vec{u} = 0$, il che é un assurdo. Pertanto, $r = r'$; la successione $\{+ \cdots + - \cdots -\}$ di r simboli $+$ e di $n - r$ simboli $-$ dicesi segnatura dello spazio vettoriale pseueuclideo.

Dimostriamo ora che, assegnata una base $\{\vec{a}_i\}$ di uno spazio pseudoeuclideo, é sempre possibile ottenere tramite essa una base ortonormale. Infatti

- se $\| \vec{a}_1 \| \neq 0$, cerco i coefficienti $\lambda_2, \cdots, \lambda_n$ tali che, definendo

$$\vec{b}_1 = \| \vec{a}_1 \|^{-1} \quad \vec{a}_1$$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 + \lambda_2 \vec{a}_1$$

$$\cdots$$

$$\vec{b}_n = \vec{a}_n + \lambda_n \vec{a}_1$$

si abbia $\quad | \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 | = 1, \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = 0, \cdots, \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_n = 0\,.$

Si trova la soluzione; mi accorgo che sono nella stessa situazione di prima ma col vantaggio che il primo vettore ha modulo unitario e tutti gli altri vettori sono ortogonali ad esso.

- se $\| \vec{a}_1 \| = 0$, ma esiste i tra $2, \cdots, n$ tale che $\| \vec{a}_i \| \neq 0$, allora scambiando $\vec{a}_i$ con $\vec{a}_1$ mi ritrovo nel caso precedente.

- se $\| \vec{a}_i \| = 0$ qualunque $i = 1, \cdots, n$, allora esiste j tra $2, \cdots, n$ tale che $\| \vec{a}_1 + \vec{a}_j \| \neq 0$, altrimenti avrei $0 = \| \vec{a}_1 + \vec{a}_j \| = \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 + 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_j + \vec{a}_j \cdot \vec{a}_j$ da cui $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_j = 0$, da cui $\vec{a}_1 \cdot \vec{v} = \vec{a}_1 \cdot (v^i \vec{a}_i) = 0$ qualunque $\vec{v}$ per cui $\vec{a}_1 = 0$ contro il fatto che $\vec{a}_1$ faceva parte di una base.

  Posso perciò sostituire $\vec{a}_1$ con $\vec{a}_1 + \vec{a}_j$ e mi ritrovo nel primo caso.

Mi ritrovo perciò sempre col primo vettore di modulo unitario e gli altri ortogonali ad esso. Riapplico questo metodo a questi altri vettori, notando che con i suddetti passaggi essi saranno sí sostituiti da altri vettori, ma questi rimarranno sempre ortogonali al primo. E cosí via, gradualmente, raggiungo il risultato richiesto.

Spazi euclidei.

Dicesi euclideo uno spazio vettoriale pseudoeuclideo in cui é soddisfatta l' ulteriore condizione

$$\| \vec{v} \| > 0 \qquad \forall \vec{v} \neq 0\,.$$

Si noti che la quarta proprietá del prodotto scalare é conseguenza di questa; infatti, se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \;\; \forall \vec{v} \in V$, allora si potrá anche prendere $\vec{v} = \vec{u}$ da cui, per la nuova proprietá degli spazi euclidei, segue $\vec{u} = \vec{0}$.

Ne segue anche che la metrica di uno spazio euclideo é una matrice definita positiva.

Sussiste anche la diseguaglianza di Schwarz: "Il valore assoluto del prodotto scalare di due vettori non supera il prodotto dei moduli dei fattori, cioé

$$| \vec{u} \cdot \vec{v} | \leq | \vec{u} | \quad | \vec{v} | \text{''}. \tag{1.13}$$

Infatti, questa proprietá é banale nel caso $\vec{v} = \vec{0}$; se invece $\vec{v} \neq \vec{0}$, da
$0 \leq \| \lambda\vec{v} + \vec{u} \| = \lambda^2 \ \| \vec{v} \| \ +2\lambda\vec{u} \cdot \vec{v} + \ \| \vec{u} \|$, ho una disequazione di secondo grado che deve essere verificata qualunque λ; pertanto il trinomio deve avere discriminante non positivo, altrimenti la nostra disequazione sarebbe violata per valori di λ interni alle due radici. Dunque,
$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 - \| \vec{v} \| \| \vec{u} \| \leq 0$ (abbiamo diviso per 4 il discriminante), da cui segue la (1.13).
Si ha pure la diseguaglianza triangolare:

$$| \ | \vec{v} | - | \vec{u} | \ | \leq | \vec{v} + \vec{u} | \leq | \vec{v} | + | \vec{u} | \ . \tag{1.14}$$

A questo riguardo, basterá dimostrare la relazione che si ottiene da essa elevando al quadrato, cioé $-2 \ | \ \vec{u} \ || \ \vec{v} \ | \leq 2\vec{u} \cdot \vec{v} \ \leq \ 2 \ | \ \vec{u} \ || \ \vec{v} \ |$ che é vera per la diseguaglianza di Schwarz (Abbiamo semplificato, in tutti e tre i termini, $| \ \vec{u} \ |^2 + | \ \vec{v} \ |^2$).
Dalla (1.13) segue poi che esiste certamente un angolo ϑ tale che

$$\cos\vartheta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{| \ \vec{u} \ | \quad | \ \vec{v} \ |}, \tag{1.15}$$

in quanto il lato destro di questa relazione ha valore assoluto non maggiore di uno, per la diseguaglianza di Schwarz. Tale angolo può essere chiamato "angolo tra $\vec{u}$ e $\vec{v}$". Dunque in qualunque spazio euclideo può essere definito l' angolo tra due vettori e il loro prodotto scalare é uguale al prodotto dei loro moduli per il coseno dell' angolo compreso.
Altre proprietá valide in uno spazio euclideo e con una base ortonormale sono:

- la matrice della metrica é la matrice identica,
- non c' é differenza tra componenti controvarianti e covarianti di un vettore,
- il prodotto scalare di due vettori é la somma dei prodotti delle loro componenti corrispondenti,
- la norma di un vettore é la somma dei quadrati delle sue componenti.

1.4 Matrici ortonormali.

Se siamo in uno spazio euclideo ed entrambe le basi sono ortonormali, allora avremo $g_{ij} = \delta_{ij}$ e $g_{i'j'} = \delta_{i'j'}$, cosicché l' eq. (1.9) diviene $\delta_{ij} = A_i{}^{i'} A_j{}^{i'}$, cioé $AA^T = I$; in altre parole, il prodotto di una riga di A per se stessa dá 1, mentre il prodotto di due righe distinte di A é zero. Si ha anche che A^T é la matrice inversa di A. Ne segue poi che $A^T A = I$, per cui il prodotto di una colonna di A per se stessa dá 1, mentre il prodotto di due colonne distinte di A é zero. Questo tipo di matrici si dicono ortonormali. Il determinante di $AA^T = I$ é $(\det A)^2 = 1$, cioé il determinante di una matrice ortonormale é 1 oppure -1. Quelle con determinante 1 preservano l' orientamento, mentre le altre lo cambiano.

2 Vettori nello spazio fisico.

Cominciamo questa sezione con l' Assioma dello Spazio Fisico: "Ad ogni osservatore lo spazio fisico appare tridimensionale omogeneo ed isotropo e vale in esso, per le figure in quiete, l' ordinaria geometria euclidea".

Consideriamo ora l' insieme dei segmenti orientati $\overrightarrow{AB}$, essendo A e B i punti estremi del segmento, e l' orientamento va da A verso B. Diciamo che due segmenti orientati hanno la stessa direzione se sono paralleli (Il segmento orientato di lunghezza nulla é inteso parallelo a qualunque altro), chiamiamo loro modulo la loro lunghezza; due segmenti orientati paralleli $\overrightarrow{AB}$ ed $\overrightarrow{A'B'}$ sono detti concordi se

- i segmenti $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ non hanno punti in comune, nel caso che A, A', B, B' non stanno su una stessa retta,
- B' é a destra di A' se B é a destra di A mentre B' é a sinistra di A' se B é a sinistra di A, nel caso che A, A', B, B' stanno su una stessa retta.

Diciamo equivalenti due segmenti orientati $\overrightarrow{AB}$ ed $\overrightarrow{A'B'}$ se sono paralleli, concordi ed hanno stesso modulo. Si può dimostrare che questa relazione gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, per cui é una relazione di equivalenza. L' insieme delle classi di equivalenza é chiamato vettore dello spazio fisico.

Definiamo la somma di due vettori non paralleli con la regola del parallelogramma: Sia $\overrightarrow{AB}$ un elemento della classe di uno dei due vettori ed $\overrightarrow{AC}$ un elemento della classe dell' altro; disegnato il parallelogramma $ABCD$, la somma dei due vettori é definita come la classe di equivalenza in cui sta la diagonale $\overrightarrow{AD}$.

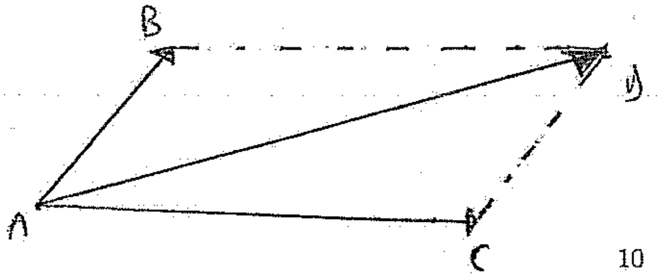
Definiamo la somma di due vettori paralleli e concordi con la regola: Sia $\overrightarrow{AB}$ un elemento della classe di uno dei due vettori ed $\overrightarrow{AC}$ un elemento della classe dell' altro; il segmento orientato parallelo e concorde ad essi e con modulo uguale alla somma dei loro moduli identifica una classe di equivalenza che chiamiamo somma dei due vettori.

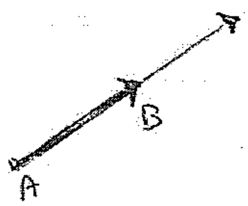
Definiamo la somma di due vettori paralleli, discordi e con moduli diversi con la regola: Sia $\overrightarrow{AB}$ un elemento della classe di uno dei due vettori ed $\overrightarrow{AC}$ un elemento della classe dell' altro; il segmento orientato parallelo ad essi e concorde a quello con modulo piú grande, ed avente come modulo il valore assoluto delle differenza dei loro moduli, identifica una classe di equivalenza che chiamiamo somma dei due vettori.

Infine, definiamo somma di due vettori paralleli, discordi e con stesso modulo, il vettore di modulo nullo.

Si può verificare che tali definizioni non dipendono dai rappresentanti scelti nelle classi dei due vettori.

Definiamo prodotto di un numero reale a per un vettore di cui $\overrightarrow{AB}$ é un rappresentante il vettore rappresentato dal segmento orientato di modulo uguale a quello di $\overrightarrow{AB}$ moltiplicato per $| a |$, parallelo ad $\overrightarrow{AB}$ e concorde con esso se $a > 0$, discorde se $a < 0$. Ovviamente, se $a = 0$ il vettore prodotto é quello nullo, ovvero quello di modulo nullo. Anche in questo caso si può verificare che tale definizione non dipende dalla scelta del rappresentante $\overrightarrow{AB}$.





Si può poi verificare che, con le suddette operazioni di somma e prodotto esterno, sono soddisfatte le proprietà (1.1), (1.2) per cui il nostro é uno spazio vettoriale.

DEFINIZIONE: Diciamo **prodotto scalare** dei vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ il prodotto dei loro moduli per il coseno dell' angolo tra essi compreso (Questi angoli sono 2 ma, essendo supplementari, hanno lo stesso coseno; se i due vettori sono paralleli e concordi l' angolo é 0, se sono paralleli e discordi l' angolo é π).

Si vede che con tale definizione sono soddisfatte le proprietá degli spazi vettoriali euclidei; due vettori ortogonali nel senso che $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, lo sono nel senso geometrico, cioé che l' angolo compreso é $\pi/2$. Dividendo un vettore non nullo per il suo modulo si trova un vettore di modulo unitario, parallelo ed equiverso a quello originale, e che viene chiamato suo versore. Si può anche definire versore $\vec{r}$ di una retta r come uno dei 2 versori paralleli alla retta stessa; in tal caso $\vec{u} \cdot \vec{r} = u_r$ é in valore assoluto pari alla proiezione ortogonale di $\vec{u}$ sulla retta r.

Definiamo ora il **simbolo di Levi-Civita**:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } ijk \text{ é una permutazione pari di } 123 \\ -1 & \text{se } ijk \text{ é una permutazione dispari di } 123 \\ 0 & \text{se } ijk \text{ non é una permutazione di } 123\,. \end{cases} \tag{2.16}$$

(ijk é una permutazione pari di 123 se si può ottenere da 123 con un numero pari di scambi tra numeri 1, 2 e 3; è una permutazione dispari se si può ottenere da 123 con un numero dispari di scambi). Una proprietá importante di tale simbolo é la seguente: "Se A_{ij} sono gli elementi di una matrice $3X3$, allora il suo determinante é

$$\varepsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} = \det A\text{''}. \tag{2.17}$$

Infatti, $\varepsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} = \varepsilon_{1jk} A_{11} A_{j2} A_{k3} + \varepsilon_{2jk} A_{21} A_{j2} A_{k3} + \varepsilon_{3jk} A_{31} A_{j2} A_{k3} = \varepsilon_{123} A_{11} A_{22} A_{33} + \varepsilon_{132} A_{11} A_{32} A_{23} + \varepsilon_{213} A_{21} A_{12} A_{33} + \varepsilon_{231} A_{21} A_{32} A_{13} + \varepsilon_{312} A_{31} A_{12} A_{23} + \varepsilon_{321} A_{31} A_{22} A_{13}$, da cui quanto asserito. Ovviamente, $\varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$ é il determinante della matrice ottenuta da A_{ij} scambiando le righe con le colonne, per cui è sempre il determinante di A_{ij}. Si ha pure

$$\varepsilon_{ijk} A_{ii'} A_{jj'} A_{kk'} = \varepsilon_{i'j'k'} \det A\,. \tag{2.18}$$

Infatti, se $i'j'k'$ é una permutazione pari di 123, il primo membro è il determinante di una matrice che si ottiene da A_{ij} con un numero pari di scambi tra le sue colonne, per cui è uguale al secondo membro; similmente, se $i'j'k'$ é una permutazione dispari di 123, il primo membro è il determinante di una matrice che si ottiene da A_{ij} con un numero dispari di scambi tra le sue colonne, per cui è uguale al secondo membro; infine, se $i'j'k'$ non é una permutazione di 123, il primo membro è il determinante di una matrice che ha due colonne uguali, per cui è zero, come il secondo membro.

DEFINIZIONE: Diciamo **prodotto vettoriale** dei vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ il vettore che, nella base $\vec{e}_i$ ha componenti

$$(\vec{u} \wedge \vec{v})^i = g^{ij} \varepsilon_{jhk} u^h v^k . \tag{2.19}$$

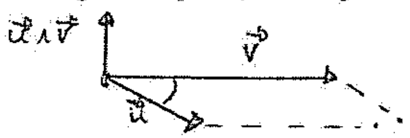
Ma rappresenta questa terna di numeri veramente un vettore? Per saperlo, vediamo se è soddisfatta la legge di controvarianza

$$(\vec{u} \wedge \vec{v})^{i'} = A_i{}^{i'} (\vec{u} \wedge \vec{v})^i = A_i{}^{i'} g^{ij} \varepsilon_{jhk} u^h v^k ,$$

che deve essere uguale alla (2.19) scritta con i $'$, cioè

$$(\vec{u} \wedge \vec{v})^{i'} = g^{i'j'} \varepsilon_{j'h'k'} u^{h'} v^{k'} = A_i{}^{i'} A_j{}^{j'} g^{ij} \varepsilon_{j'h'k'} A_h{}^{h'} u^h A_k{}^{k'} v^k = \varepsilon_{jhk} u^h v^k A_i{}^{i'} g^{ij} (\det A)^{a} ,$$

(abbiamo usato la (1.11) e la legge di controvarianza nel penultimo passaggio, e l' eq. (2.18) nell' ultimo) per cui l' uguaglianza è verificata, ma solo per le trasformazioni con $\det A = 1$ (Si potrebbe anche dimostrare che queste sono le trasformazioni che lasciano invariato il volume di una figura). Un caso particolare sono le trasformazioni ortogonali che preservano l' orientamento. Visto questo, possiamo dire che il prodotto vettoriale non rappresenta un vettore; lo chiamiamo pseudo-vettore e, a tutti gli effetti, si trasforma come un vettore ma solo per le trasformazioni con determinante unitario. In particolare, partendo da una base ortonormale levogira possiamo considerare la trasformazione ortonormale che preserva l' orientamento e che porta l' asse delle x parallelo ed equiverso ad $\vec{u}$ e l' asse delle y parallelo ed equiverso alla componente di $\vec{v}$ ortogonale ad $\vec{u}$. In tal caso la (2.19) ci dice che $(\vec{u} \wedge \vec{v})^i = \varepsilon_{i12} u^1 v^2$ per cui $\vec{u} \wedge \vec{v} \equiv (0\, ,\, 0\, ,\, u^1 v^2)$, cioè il prodotto vettoriale di due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ è ortogonale ad entrambi, ha verso tale che la terna $\vec{u}$, $\vec{v}$ ed $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sia levogira e modulo pari al prodotto dei moduli per il seno dell' angolo compreso, ovvero pari all' area del parallelogramma che ha $\vec{u}$ e $\vec{v}$ come lati contigui.



Dalla definizione (2.19) e dalla proprietá (2.17) segue che

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}, \tag{2.20}$$

cioé $\vec{u}\wedge\vec{v}$ é dato da un determinante simbolico nella cui prima riga ci sono i versori degli assi, nella seconda le componenti del primo vettore e nella terza riga le componenti dell' altro vettore; sebbene sia un determinante simbolico, si calcola con le solite regole dei determinanti. Dalle precedenti seguono poi anche le seguenti proprietá:

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}//\vec{v},$$
$$\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u},$$
$$(m\vec{u})\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge(m\vec{v})=m\vec{u}\wedge\vec{v},$$
$$\vec{u}\wedge\sum_{i=1}^{n}\vec{v}_i=\sum_{i=1}^{n}\vec{u}\wedge\vec{v}_i\,,$$
$$\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2=\vec{e}_3\,.$$

La seconda di questa mostra che il prodotto vettoriale non gode della proprietà commutativa, anzi cambia segno quando si cambia l' ordine dei fattori. All' ultima bisogna aggiungere tutte quelle che si ottengono da essa con una permutazione ciclica degli indici 1,2,3 , e quelle che si ottengono da queste scambiando l' ordine dei fattori ed usando la proprietá anticommutativa. Altra proprietá rilevante é

$$(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u} \quad , \quad \vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w} \quad ,$$

nota come proprietà del **doppio prodotto vettoriale**; la seconda di queste segue dalla prima e dalla proprietá anticommutativa del prodotto vettoriale. Per provare la prima, basterá farlo in un riferimento ortonormale levogiro opportuno e, come tale, prendiamo quello in cui $\vec{u}\equiv(u,0,0)$ e $\vec{v}\equiv(v_1,v_2,0)$; in tal caso tale relazione diviene

$$uv_2\,(-w_2\,,\,w_1,0)=(uw_1v_1-v_1w_1u-v_2w_2u\,,\,uw_1v_2\,,\,0)\,,$$

che é certamente verificata.

Un' ultima proprietà che ci sar à utile nel seguito è riferita all' **Equazione vettoriale:** Dati i vettori

$\underline{u}$ e $\underline{v}$ con $\underline{u} \neq \underline{0}$, si tratta di trovare il vettore $\underline{x}$ tale che

$$\underline{x} \wedge \underline{u} = \underline{v}. \tag{21}$$

Sussiste il seguente TEOREMA: "Condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione (21) ammetta soluzioni é che $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$. In tal caso, tutte e sole le soluzioni sono date da

$$\underline{x} = \frac{\underline{u} \wedge \underline{v}}{u^2} + \lambda \underline{u}, \quad \forall \lambda \in \Re". \tag{22}$$

Proof. Il fatto che $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ sia condizione necessaria, segue dalla definizione di prodotto vettoriale. Per dimostrare che essa é anche sufficiente, basta verificare che grazie ad essa la (21) ha soluzione. Per semplicitá cerchiamo una soluzione parallela a $\underline{u} \wedge \underline{v}$, cioé del tipo $\underline{x} = \mu \underline{u} \wedge \underline{v}$. Sostituendo quest'ultima espressione nella (21) si trova $\mu = \frac{1}{u^2}$. Se indichiamo con x^* la corrispondente soluzione, si ha $\underline{x}^* \wedge \underline{u} = \underline{v}$. Ci chiediamo se esistono altre soluzioni: sottraendo $\underline{x}^* \wedge \underline{u} = \underline{v}$ dall'equazione (21), si trova $(\underline{x}^* - \underline{x}) \wedge \underline{u} = 0$, per cui deve essere $\underline{x}^* - \underline{x} = \lambda \underline{u}$ da cui segue la (22). ■

Consideriamo ora la definizione: "Dicesi **Prodotto misto** dei vettori $\underline{u}$, $\underline{v}$ e $\underline{w}$ il prodotto scalare $\underline{u} \cdot \underline{v} \wedge \underline{w}$" (Ovviamente prima va eseguito il prodotto vettoriale e poi quello scalare, altrimenti non avrebbe senso uno scalare moltiplicato vettorialmente per un vettore). Sussistono le seguenti proprietá:

Proprietá 1: "Il prodotto misto, in termini delle componenti dei suoi fattori in una data base ortonormale, é dato dal determinante

$$\underline{u} \cdot \underline{v} \wedge \underline{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}, \tag{23}$$

che segue facilmente dalla (20).

Proprietá 2: "Il prodotto misto di 3 vettori é nullo se e solo se i 3 vettori sono complanari". (Segue facilmente dalla (23)).

Proprietá 3: "Il prodotto misto di 3 vettori non cambia se si permutano ciclicamente i suoi fattori". (Segue facilmente dalla (23) in quanto una permutazione ciclica dei fattori equivale ad un numero pari di scambi tra le righe del determinante).

Proprietá 4: "Nel prodotto misto (23) si possono scambiare i simboli di prodotto scalare e prodotto