che corrispondono alle equazioni di Hamilton per la funzione

$$K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) = H\left(a(t)\mathbf{P}, \frac{\mathbf{Q}}{a(t)}, t\right) + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}.$$

■

2.4 *Esempio*

La trasformazione che scambia a meno di un segno le coordinate $q_i$ con i corrispondenti momenti cinetici $p_i$ conserva la struttura canonica delle equazioni di Hamilton

$$\mathbf{P} = -\mathbf{q}, \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{p}. \qquad [2.14]$$

La nuova hamiltoniana è legata alla vecchia da

$$K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) = H(\mathbf{Q}, -\mathbf{P}, t).$$

Questa trasformazione mostra come nell'ambito del formalismo hamiltoniano non vi sia una sostanziale differenza di ruolo tra le coordinate $\mathbf{q}$ e i momenti coniugati $\mathbf{p}$.

■

2.5 *Esempio*

Le *trasformazioni di punto* conservano la struttura canonica delle equazioni di Hamilton. Infatti sia

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}), \qquad [2.15]$$

una trasformazione invertibile di coordinate lagrangiane. Le velocità generalizzate si trasformano linearmente

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}(\mathbf{q})\dot{q}_j = J_{ij}(\mathbf{q})\dot{q}_j,$$

dove $i = 1, \ldots, l$ e abbiamo adottato la convenzione della somma sugli indici ripetuti. $J(\mathbf{q}) = (J_{ij}(\mathbf{q}))$ è la matrice jacobiana della trasformazione [2.15]. Se $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ è la lagrangiana del sistema, indichiamo con

$$\hat{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = L(\mathbf{q}(\mathbf{Q}), J^{-1}(\mathbf{q}(\mathbf{Q}))\dot{\mathbf{Q}}, t)$$

la lagrangiana espressa mediante le nuove coordinate, e con $\mathbf{P}$ il momento cinetico corrispondente, le cui componenti sono date da

$$P_i = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{Q}_i} = J_{ji}^{-1}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = J_{ji}^{-1}p_j,$$

per $i = 1, \ldots, l$. La trasformazione [2.15] induce pertanto una trasformazione dei momenti cinetici coniugati

$$\mathbf{P} = (J^T)^{-1}\mathbf{p}, \tag{2.16}$$

e le equazioni di Hamilton associate all'hamiltoniana $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ diventano

$$\dot{P}_i = -J_{ji}^{-1}\frac{\partial H}{\partial q_j} - p_j \frac{\partial J_{ji}^{-1}}{\partial Q_k} J_{kn} \frac{\partial H}{\partial p_n},$$

$$\dot{Q}_i = J_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j},$$

dove $i = 1, \ldots, l$. Dimostriamo che queste equazioni coincidono con il sistema di equazioni di Hamilton associate a

$$K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) = H(J^T(\mathbf{q}(\mathbf{Q}))\mathbf{P}, \mathbf{q}(\mathbf{Q}), t),$$

(è facile verificare che $K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$ è l'hamiltoniana associata alla lagrangiana $\hat{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t)$ dalla trasformazione di Legendre [2.2 cap. 8]). Mentre la verifica che $\dot{\mathbf{Q}} = \nabla_{\mathbf{P}} K$ è immediata, derivando $K$ rispetto a $Q_i$ troviamo

$$-\frac{\partial K}{\partial Q_i} = -J_{ji}^{-1}\frac{\partial}{\partial q_j} H(J^T(\mathbf{q})\mathbf{P}, \mathbf{q}, t) = -J_{ji}^{-1}\frac{\partial H}{\partial q_j} - J_{ji}^{-1}\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial J_{hk}}{\partial q_j} J_{nh}^{-1} p_n.$$

D'altronde, derivando rispetto a $t$ la relazione

$$J_{ij}(\mathbf{q}) J_{jk}^{-1}(\mathbf{Q}(\mathbf{q})) = \delta_{ik},$$

tenendo conto che $\dot{Q}_k = J_{kn}\dfrac{\partial H}{\partial p_n}$, troviamo (dopo qualche passaggio un po' noioso ma elementare)

$$-\frac{\partial J_{ji}^{-1}}{\partial Q_k} J_{kn}\frac{\partial H}{\partial p_n} = J_{ni}^{-1}\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial J_{hk}}{\partial q_n} J_{jh}^{-1},$$

da cui segue che

$$-p_j \frac{\partial J_{ji}^{-1}}{\partial Q_k} J_{kn}\frac{\partial H}{\partial p_n} = -J_{ji}^{-1}\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial J_{hk}}{\partial q_j} J_{nh}^{-1} p_n,$$

che mostra appunto che $\dot{P}_i = -\dfrac{\partial K}{\partial Q_i}$. ∎

Una classe - per la verità generalissima, come vedremo - di trasformazioni che conservano la struttura canonica delle equazioni di Hamilton è individuata dalla seguente definizione.