$$q = \lim_{x\to\pm\infty} (x\,e^{1/x} - x) = \lim_{x\to\pm\infty} x(e^{1/x} - 1) =$$

(87.13)
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{1/x}(-1/x^2)}{-1/x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = 1;$$

per calcolare q si è usato il teorema di L'Hôpital. Si è trovato che la retta di equazione $y = x + 1$ è un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$ per la funzione f(x).

Con gli elementi trovati (dominio della funzione, segno, asintoto verticale per $x \to 0^+$, limite notevole (87.8) per $x \to 0^-$, intervalli di monotonia e di convessità, punto di minimo relativo in $x = 1$, asintoto obliquo) si e segue il disegno del grafico di f come in figura 10.8.

88. La formula di Taylor

Abbiamo già introdotto nel paragrafo 80 un metodo per "approssimare" una funzione derivabile con un polinomio di primo grado. Abbiamo infatti affermato che

(88.1)
$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (\textit{per } x \textit{ vicino ad } x_0),$$

dove con il simbolo $\cong$ intendiamo che la differenza tra il primo ed il secondo membro, che indichiamo con $R_1(x)$ (resto di ordine 1), tende a zero più rapidamente di $x - x_0$. Cioè, riscrivendo la (80.5) con il resto R_1, abbiamo:

(88.2)
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_1(x),$$

(88.3)
$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = 0\,.$$

Sapendo che una funzione è derivabile fino ad un ordine $n > 1$, ci si può domandare se sia possibile ottenere un miglior grado di approssimazione rispetto al caso $n = 1$, cioè se sia possibile decomporre f(x) in un polinomio di grado n ed un resto $R_n(x)$ che tenda a zero più rapidamente di $(x - x_0)^n$. La formula di Taylor risponde affermativamente al quesito posto.

Prima di enunciare la formula di Taylor, introduciamo il simbolo di *sommatoria*, utile per scrivere in modo compatto la somma di più addendi. Diamo alcuni esempi; in particolare, il simbolo a primo membro della (88.4) significa che si considera la somma di n addendi, con il termine generico uguale ad a_k, con l'indice k che assume tutti i valori compresi tra $k = 1$ e $k = n$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \,, \tag{88.4}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (2k + 1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1), \tag{88.5}$$

$$\sum_{k=2}^{4} k! = 2! + 3! + 4! = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 32 \,. \tag{88.6}$$

Nell'ultima sommatoria abbiamo usato il simbolo k! che si legge k *fattoriale*, ed è uguale al prodotto dei primi k numeri naturali.

FORMULA DI TAYLOR. — *Sia* f(x) *una funzione derivabile* n *volte in* x_0. *Risulta*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x), \tag{88.7}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \tag{88.8}$$

Nella formula (88.7), per $k = 0$, si intende $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$, e $0! = 1$. Quindi ad esempio, se $n = 2$, si ottiene:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + R_2(x), \tag{88.9}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_2(x)}{(x - x_0)^2} = 0; \tag{88.10}$$

per $n = 1$ si riottengono le (88.2), (88.3). Il lettore scriva esplicitamente la sommatoria per altri valori di n.

Dimostriamo ora la formula di Taylor supponendo che la derivata $f^{(n)}(x)$ sia continua in x_0. Inoltre, avendo difficoltà a considerare n generico, si consiglia di rileggere il metodo proposto con $n = 2$.

Ricavando $R_n(x)$ dalla (88.7), occorre dimostrare che:

(88.11)
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n/n!]}{(x - x_0)^n} = 0$$

Il limite si presenta sotto forma indeterminata 0/0. Utilizziamo il teorema di L'Hôpital. Notiamo esplicitamente che occorre derivare numeratore e denominatore rispetto ad x; quindi ad esempio la derivata di $f(x_0)$ vale zero, mentre la derivata di $f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n/n!$ è uguale a

$$\text{(88.12)} \qquad \frac{f^{(n)}(x_0) \cdot n(x - x_0)^{n-1}}{n!} = \frac{f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^{n-1}}{(n - 1)!}.$$

Quindi il limite nella (88.11) è lo stesso di

$$\text{(88.13)} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - [f'(x_0) + \dots + f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^{n-1}/(n - 1)!]}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

purchè il secondo limite esista. Se $n > 1$, abbiamo ottenuto una nuova forma 0/0. Dopo aver applicato in totale n volte il teorema di L'Hôpital, abbiamo:

$$\text{(88.14)} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Quest'ultimo limite è zero, perché $f^{(n)}(x)$ è continua in x_0. Perciò la tesi (88.11) è dimostrata.

Sviluppiamo secondo la formula di Taylor alcune funzioni elementari. Se $f(x) = e^x$, risulta $f^{(n)}(x) = e^x$ per ogni n. Quindi, ponendo $x_0 = 0$, si ha $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ per ogni n. Perciò otteniamo

$$\text{(88.15)} \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x).$$

Analogamente, scegliendo $x_0 = 0$, si ottiene

(88.16) $$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + R_n(x);$$

(88.17) $$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x);$$

(88.18) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x).$$

Allo scopo di verificare graficamente i risultati ottenuti, abbiamo riportato nella figura 10.9 i grafici dei polinomi di grado: primo, terzo, quinto,..., che si ricavano dallo sviluppo in formula di Taylor per la funzione sen x. Tenendo conto della (88.17), abbiamo posto:

(88.19) $$f_1(x) = x; \qquad f_3(x) = x - \frac{x^3}{6}; \qquad f_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \dots$$

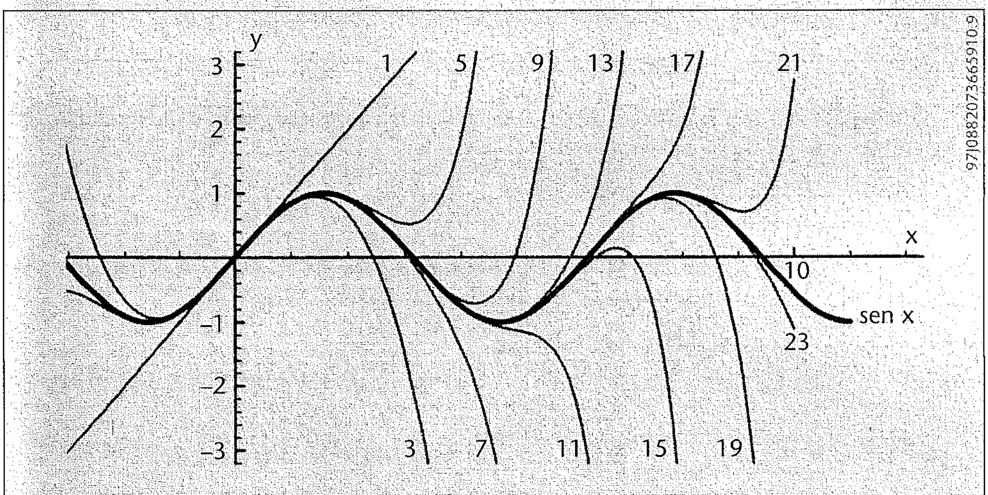

Figura 10.9

Il disegno della figura 10.9 è stato eseguito con l'ausilio di un computer. Si nota chiaramente che i polinomi $f_{2k+1}(k = 0, 1, 2, \dots)$ di Taylor hanno un grafico per x vicino a zero, tanto più simile al grafico della funzione sen x, quanto più k è grande.

Per mezzo della formula di Taylor è possibile generalizzare il criterio (85.11), (85.12) nel modo seguente:

CRITERIO PER I PUNTI DI MASSIMO O DI MINIMO. — *Se esistono le derivate sottoindicate della funzione* f(x) *nel punto* x_0, *vale il seguente schema:*

$$f'(x_0) = 0: \begin{cases} f''(x_0) > 0 & \textit{minimo relativo in } x_0 \\ f''(x_0) < 0 & \textit{massimo relativo in } x_0 \\ f''(x_0) = 0: & \begin{cases} f^{(3)}(x_0) \neq 0 & \textit{né massimo, né minimo in } x_0 \\ f^{(3)}(x_0) = 0: & \begin{cases} f^{(4)}(x_0) > 0 & \textit{minimo relativo in } x_0 \\ f^{(4)}(x_0) < 0 & \textit{massimo relativo in } x_0 \\ f^{(4)}(x_0) = 0: & \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Dimostrazione: una situazione generica nello schema sopra proposto è quella in cui f(x) è derivabile n volte in x_0 per qualche $n \geq 2$, e risulta

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0; \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0. \tag{88.20}$$

Consideriamo il caso in cui $f^{(n)}(x_0) > 0$ (la trattazione del caso $f^{(n)}(x_0) < 0$ è analoga). Per l'annullarsi delle derivate, la formula di Taylor (88.7) diviene

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \tag{88.21}$$

e, per la (88.8):

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \\ &= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n}\right] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} > 0. \end{aligned} \tag{88.22}$$

Per il teorema della permanenza del segno, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} > 0, \qquad \forall\, x: 0 \neq |x - x_0| < \delta. \tag{88.23}$$

Se n è pari il denominatore $(x - x_0)^n$ è positivo per ogni $x \neq x_0$; perciò risulta $f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ e quindi x_0 è un punto di minimo relativo per f(x).

Se invece n è dispari, dato che il denominatore della frazione (88.23) cambia segno per x maggiore o minore di x_0, risulta che $f(x) > f(x_0)$, oppure $f(x) < f(x_0)$, rispettivamente per $x > x_0$, oppure $x < x_0$. Perciò la funzione f(x) non ha né massimo né minimo in x_0.

A titolo di esempio osserviamo che per la funzione $f(x) = x^4$ risulta

$$f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0, \qquad f^{(4)}(0) = 4! = 24 \tag{88.24}$$

e pertanto, in base al criterio precedente, f(x) ammette minimo nel punto $x_0 = 0$; la verifica diretta di tale proprietà è immediata: infatti $f(x) = x^4 \geq 0 = f(0)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Invece, per la funzione $g(x) = x^3$ si ha:

$$g'(0) = g''(0) = 0, \quad g^{(3)}(0) = 3!, \tag{88.25}$$

per cui, in $x_0 = 0$, g(x) non assume massimo né minimo. In realtà la funzione g(x), rappresentata in figura 11.5, ha un flesso in $x_0 = 0$. Osserviamo che tale proprietà vale in generale: *se in un punto la prima derivata non nulla è di ordine dispari (maggiore od uguale a 3) allora la funzione presenta un flesso nel punto.*