cioè moto esponenziale.
Attorno a $\vartheta = 0$, si ha invece

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l}\vartheta\,, \quad \text{da cui} \quad \vartheta = R\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \delta\right)\,,$$

essendo esso un moto armonico. Pertanto i moti in prima approssimazione sono in questo caso "piccoli moti".

MOTO DI UN PUNTO VINCOLATO AD UNA SUPERFICIE LISCIA E FISSA

Siano $P = P(u_1\,,\,u_2)$ le equazioni parametriche della superficie. Le equazioni (11) di pag. 76 degli appunti di Meccanica 1 per questo caso sono

$$\begin{cases} m\ddot{P} = \vec{F}^a + \vec{F}^v \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} - \frac{\partial T}{\partial u_i} = Q_i = \vec{F}^a \cdot \frac{\partial P}{\partial u_i} \quad \text{con}\, T = \frac{1}{2}m\left[\frac{\partial P}{\partial u_i}\dot{u}_i\right]^2 . \end{cases} \tag{23}$$

la seconda delle quali ci dà $u_i = u_i(t)$ e, dopo ciò, la 1^a ci dà $\vec{F}^v$.

Geodetiche.

Sono le curve che stanno sulla superficie e che, in ogni loro punto, hanno normale principale che è normale anche alla superficie.
Sia $P(\lambda) = P[u_1(\lambda)\,,\,u_2(\lambda)]$ una geodetica; poichè

$$\vec{t} = \frac{\frac{dP}{d\lambda}}{\left|\frac{dP}{d\lambda}\right|} \quad \text{e} \quad \frac{d\vec{t}}{d\lambda} = \frac{d\vec{t}}{ds}\frac{ds}{d\lambda} = \frac{1}{\varrho}\frac{ds}{d\lambda}\vec{n} \quad ,$$

le equazioni delle geodetiche sono

$$\left[\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\frac{dP}{d\lambda}}{\left|\frac{dP}{d\lambda}\right|}\right)\right] \cdot \frac{\partial P}{\partial u_i} = 0 \tag{24}$$

in quanto $\frac{\partial P}{\partial u_1}$ e $\frac{\partial P}{\partial u_2}$ sono tangenti alla superficie.
Le due equazioni (24) non sono indipendenti; infatti, moltiplicando per

$$\frac{u_i'}{\left|\frac{dP}{d\lambda}\right|} \quad \text{si trova} \quad \left[\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\frac{dP}{d\lambda}}{\left|\frac{dP}{d\lambda}\right|}\right)\right] \cdot \frac{\frac{dP}{d\lambda}}{\left|\frac{dP}{d\lambda}\right|} = 0$$

che è una identità in quanto $\frac{\frac{dP}{d\lambda}}{\left|\frac{dP}{d\lambda}\right|}$ ha modulo 1 costante.
Se poi si vogliono imporre anche condizioni sulla rappresentazione parametrica della curva, si può richiedere che λ sia lineare nell' ascissa curvilinea , cioè $\left|\frac{dP}{d\lambda}\right| = costante$. In tal caso le (24) diventano

$$\frac{d^2P}{d\lambda^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial u_i} = 0\,, \qquad \left|\frac{dP}{d\lambda}\right| = costante\,; \qquad (25)$$

la seconda di queste è conseguenza della prima perchè, moltiplicando questa per u_i' troviamo $\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{dP}{d\lambda}\right)^2 = 0$. Se poi si vuole che λ sia proprio l' ascissa curvilinea, basterà imporre la condizione iniziale

$$\left|\frac{dP}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = 1\,.$$

Esempi: Geodetiche del piano: Le equazioni del piano sono

$P = 0 + u_1\vec{u} + u_2\vec{v}$, con $\vec{u}$ e $\vec{v}$ linearmente indipendenti e che potrebbero esser presi anche ortogonali. Le $(25)_1$ diventano $u_1'' = u_2'' = 0$, cioè $u_1 = c_1\lambda + d_1$, $u_2 = c_2\lambda + d_2$ e si trova una retta, come ci aspettavamo.

Geodetiche del cilindro: Le equazioni parametriche del cilindro sono

$P \equiv (R\cos\vartheta, R\sin\vartheta, z)$, cioè $\vartheta = u_1$, $z = u_2$. Le $(25)_1$ diventano $\vartheta'' = z'' = 0$, cioè $\vartheta = c_1\lambda + d_1$, $z = c_2\lambda + d_2$ e si trova un' elica cilindrica.

Geodetiche della superficie sferica:
Cerchiamo la geodetica che passa per P_0 ed ha ivi tangente $\vec{t}_0$. Prendiamo asse x la retta che congiunge P_0 al centro della sfera, orientata verso P_0; prendiamo asse delle y parallelo ed equiverso a $\vec{t}_0$. Dopo ciò prendiamo le coordinate sferiche, per cui le equazioni parametriche della superficie sferica sono
$P \equiv (R\sin\vartheta\cos\varphi\,,\ R\sin\vartheta\sin\varphi\,,\ R\cos\vartheta)$.
Per le condizioni iniziali si ha $\vartheta(0) = \frac{\pi}{2}$, $\varphi(0) = 0$, $\vartheta'(0) = 0$. (26)
Le $(25)_1$ diventano

$$\begin{cases} -R^2\sin\vartheta\cos\vartheta(\varphi')^2 + R^2\vartheta'' = 0 \\ 2R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\vartheta'\varphi' + R^2\sin^2\vartheta\varphi'' = 0 \end{cases} . \qquad (27)$$

Si vede che $\vartheta(\lambda) = \frac{\pi}{2}$, $\varphi(\lambda) = c_1\lambda$ soddisfa sia le equazioni (27) che le condizioni iniziali (26). Per il teorema di esistenza ed unicità, essa è pertanto la soluzione. Ma per $\vartheta(\lambda) = \frac{\pi}{2}$, si trova una circonferenza massima. Pertanto, le geodetiche della superficie sferica sono le circonferenze massime, ovvero intersezioni della superficie sferica con piani passanti per il suo centro.

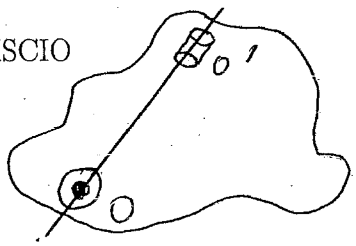
MOTO SPONTANEO:

È il moto di un punto vincolato ad una superficie liscia e fissa in assenza di forze attive. Sappiamo che l' equazione $(23)_2$ è equivalente a

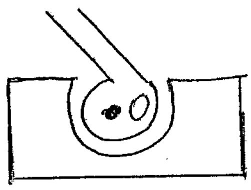
$$m\ddot{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial u_i} = \vec{F}^a \cdot \frac{\partial P}{\partial u_i};$$

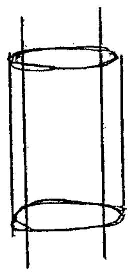
poichè $\vec{F}^a = 0$, si ha $\ddot{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial u_i} = 0$, cioè la $(25)_1$. Pertanto, il moto spontaneo avviene su una geodetica; grazie alla $(25)_2$ si ha anche $|\vec{v}|$ costante, cioè la geodetica viene percorsa con moto uniforme.

CORPO RIGIDO CON ASSE FISSO E LISCIO



L' asse fisso può essere realizzato mediante due cerniere, una sferica in O ed una cilindrica in O'. Una cerniera sferica è costituita da una cerniera cava fissa dentro alla quale può muoversi una sfera solidale al corpo; perciò realizza un punto fisso. Una cerniera cilindrica è costituita da un cilindretto cavo dentro al quale può ruotare e scorrere un asse solidale al corpo. Poichè il vincolo è liscio, esso può esercitare tutte le reazioni vincolari con





$$Q^v_h = 0, \quad \text{cioè} \quad \vec{R}^v \cdot \frac{\partial O}{\partial q_h} + \vec{M}^v_O \cdot \vec{\omega}_h = 0\,, \qquad (28)$$

dove $h = 1$ giacchè abbiamo un sol parametro lagrangiano ϑ definito come segue: chiamando $\vec{k}$ il versore dell' asse fisso, ϑ è l' angolo di cui deve ruotare un piano fisso per sovrapporsi ad un piano solidale, entrambi i piani passanti per l' asse fisso, nel verso positivo delle rotazioni visto da $\vec{k}$; si ha poi $\vec{\omega} = \dot{\vartheta}\vec{k}$. Poichè $\vec{\omega}_h$ è definito da $\vec{\omega} = \vec{\omega}_h\dot{q}_h$ ne segue $\vec{\omega}_1 = \vec{k}$. Da questa, e dal fatto