① Esercizi sui limiti di successione

Come già avvenuto per i numeri complessi anche in questo caso ho cercato di essere quanto più dettagliato possibile. È comunque probabile che ci sia qualche svista dovuta all'estrema rapidità con cui ho scritto queste pagine. Ho inserito fra gli esercizi anche qualche verifica del risultato e uno o due esercizi appena un pò più teorici. La tipologia (e spesso anche il testo) è quella degli esercizi svolti in classe. Esercizi simili si trovano in tutti i testi di Analisi Matematica. Dovreste rifare tutti i calcoli e eventualmente, ~~fa~~ svolgere esercizi analoghi scegliendoli da un libro (per esempio dal libro suggerito "Esercitazioni di Matematica" volume primo autori Marcellini - Sbordone).

Buona lettura! [N.B. I primi esercizi sono un approfondimento della teoria]

Lo svolgimento degli esercizi richiede ~~alcune~~ la conoscenza di alcuni risultati che riporto per completezza (oltre che una conoscenza delle definizioni di successione convergente, divergente non regolare etc.)

1) $$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} = \begin{cases} \infty & \forall \alpha>0 \\ 1 & \text{se } \alpha=0 \\ 0 & \text{se } \alpha<0 \end{cases}$$

2) $$\lim_{n\to+\infty} a^{n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 1 & \text{se } a=1 \\ 0 & \text{se } -1<a<1 \\ \text{non esiste} & \text{se } a\leq -1 \end{cases}$$

3) $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \qquad \forall a>0$$

4) $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^{\alpha}} = 1 \qquad \forall \alpha\in\mathbb{R}$$

5) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n^b} = 0 \qquad b>0,\ a>1$$

6) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0 \qquad \forall b>0 \text{ e } a>1$$

7) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ $\qquad e = 2{,}718281828\ldots$

e numero di Nepero

8) se $e_n \to 0$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin e_n}{e_n} = 1$

NOTA | I limiti 1), 2), 3) e 4) sono stati dimostrati a lezione con i pochi "strumenti" finora a nostra disposizione. Il limite 7) sarà considerato ~~in quest~~ fra gli esercizi discussi sotto. Il limite 5), 6) e 8) saranno riconsiderati più avanti (quando studieremo i limiti di funzioni)

1) Verificare che: $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n-1} = 0$

Si tratta di dimostrare che

$\forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon$ (intero positivo) t.c. $\left|\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon,\ \forall n > N_\varepsilon$

Poiché $\left|\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon$ è equivalente a $\boxed{-\varepsilon < \frac{1}{n+1} < \varepsilon}$ a) ,

si osserva che la disequazione $-\varepsilon < \frac{1}{n+1}$ è sempre soddisfatta essendo $\frac{1}{n+1} > 0$. Affinché la disequazione a) sia soddisfatta deve essere $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Scegliendo N_ε come l'intero successivo a $\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$, si ottiene

$\forall\varepsilon, \exists N_\varepsilon > 0$ (quello sopra determinato) t.c. $\left|\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon \quad \forall n > N_\varepsilon$

e questo significa che $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n-1} = 0$

b) Considerata la successione $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Si dimostri che: (esercizi assegnati dal testo Bramanti-Pagani-Salsa)

~~b1~~) a_n è monotona crescente

b2) a_n è limitata.

b1) a_n è monotona crescente se $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Quindi questo significa che per verificare che a_n sia crescente basta che sia $a_{n-1} \leq a_n \Rightarrow \boxed{\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1}$

Ricordo preliminarmente la cosiddetta disuguaglianza di Bernoulli:

$$(1+h)^n \geq 1+nh \qquad \forall h \geq -1.$$

Poiché $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \Rightarrow a_{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$

Perciò $$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \overset{(*)}{=} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \frac{n}{n-1}$$

cioè $$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right) = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)$$

Per la disuguaglianza di Bernoulli $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1+n\left(-\frac{1}{n^2}\right) = 1-\frac{1}{n}$

Quindi $$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right) \geq \cancel{\left(1-\frac{1}{n}\right)} \cdot \frac{1}{\cancel{\left(1-\frac{1}{n}\right)}} = 1$$

cioè $\boxed{\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1}$.

(*) Basta moltiplicare e dividere per $\frac{n-1}{n}$

b2) a_n è limitata.

Osservo preliminarmente che, per quanto provato al punto b1) essendo per $n=1$ $a_1 = \left(1+1\right)^1 = 2$, la successione è crescente quindi $a_n \geq 2$ $\forall n$. Mostriamo che è limitata superiormente.

$$\cancel{a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$\cancel{\frac{1}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n}$$

~~Consideriamo gli interi multipli di 6 cioè~~ $\cancel{n = 6m}$

~~Si trova~~ $\cancel{\frac{1}{a_{6m}} = \left(1-\frac{1}{6m+1}\right)^{6m} = \left[\left(1-\frac{1}{6m+1}\right)^m\right]^6 \geq \left(1-\frac{m}{6m+1}\right)^6 = \left(\frac{5m+1}{6m+1}\right)^6}$

~~* applicando la disuguaglianza di Bernoulli~~

~~cioè~~ $\cancel{\frac{1}{a_{6m}} \geq \left(\frac{5m+1}{6m+1}\right)^6}$

A tal proposito, seguendo il suggerimento del vostro libro, consideriamo la successione $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$

Chiaramente si ha $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n$

Osserviamo inoltre che $b_1 = \left(1+1\right)^2 = 4$

Se b_n risultasse essere decrescente, cioè $b_{n-1} \geq b_n$ $\forall n$

allora $b_n \leq 4$ e inoltre avrei $2 \leq a_n < b_n \leq 4$ cioè

a_n limitata. Occorre provare che $\frac{b_{n-1}}{b_n} \geq 1$

Si ha $b_{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$

Quindi $\frac{b_{n-1}}{b_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

cioè $\frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{n-1}{n}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1}$

Applicando la disuguaglianza di Bernoulli all'ultimo fattore dell'ultimo termine si trova $\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \ge 1+(n+1)\frac{1}{n^2-1} = 1+\left(\frac{1}{n-1}\right)$

Quindi $\frac{b_{n-1}}{b_n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \ge \frac{n-1}{n}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = \left(\frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n}}\right)\frac{\cancel{n}}{\cancel{n-1}} = 1$

cioè $b_{n+1} \ge b_n$ e la dimostrazione è ora completa essendo b_n decrescente

---

c) Dimostrare che la successione $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è convergente.
Dall'esercizio precedente sappiamo che la successione a_n risulta essere crescente e limitata. Applicando il teorema (dimostrato in classe) secondo cui ogni successione monotona crescente e limitata è convergente segue quanto richiesto dall'esercizio. NOTA: la successione converge al numero $e = 2{,}718281828\ldots$ e si noti $2<e<4$!!

---

d) Esercizio ~~[illegible]~~.
Dimostrare che se a_n è una successione tale che
$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ allora $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$

~~Sia $m \in \mathbb{N}$ t.c.~~

Sia m l'intero tale che $m \le a_n \le m+1$,

si ha $\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m} < \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ perché ~~base ed esponente~~ di ~~1~~

perché $1+\frac{1}{m+1} < 1+\frac{1}{a_n}$ e $m \le a_n$

mentre $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \le \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$ perché? (completa il ragionamento)

Quindi $\boxed{\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m} < \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}}$ (∇)

Poiché $\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m} = \lim_{m\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}\cdot\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{-1}\right]$

teorema prodotto dei limiti

$= \left[\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}\right]\cdot\lim_{m\to+\infty}\left(\frac{m+1}{m+2}\right) = e\cdot 1 = e$

$m+1 = n$

e, analogamente, $\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} = \lim_{m\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\left(1+\frac{1}{m}\right)\right]$

$= \lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\cdot\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right) = e\cdot 1 = e$

Il risultato segue dall'applicazione del teorema dei due carabinieri alla (∇)

N.B vale anche il teorema: $\boxed{\text{se } \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \text{ allora } \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e}$

Calcolare:

e) $\lim_{n\to+\infty}\frac{n-3}{4n+1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n}\left(1-3/n\right)}{\cancel{n}\left(4+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{n}\right)}{4+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}} = \frac{1}{4}$

limite del quoziente

oppure $\frac{n-3}{4n+1} \sim \frac{\cancel{n}}{4\cancel{n}}$ e quindi $\lim_{n\to+\infty}\frac{n-3}{4n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{4n} = \frac{1}{4}$

f) Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^4+1}{3n+3} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{n\to+\infty}\frac{n^4\left(1+1/n^4\right)}{n\left(3+3/n\right)} = \frac{\lim_{n\to+\infty} n^3\cdot\lim\left[1+\frac{1}{n^4}\right]}{\lim\frac{3}{n}+3}$

$= +\infty$

g) Calcolare: $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{1-n} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n\left(\frac{1}{n}-1\right)} =$

$= \frac{1+\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\left(\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\right)\cdot\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}-1\right)} \to \frac{1}{\infty} = 0$

h) Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} n\sqrt{\frac{1}{2n+2}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n^2}{2n+2}} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\left(\frac{n}{2+\frac{2}{n}}\right)} \Longrightarrow +\infty$$

i) Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} n\sqrt{\frac{1}{2n^2+2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n^2}{2n^2+2}} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{2+2/n^2}} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

l) Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \overset{+\infty-\infty}{=} \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \longrightarrow 0$$

m) Calcolare: $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^{2015}} = 1$ vedi limite fondamentale 4

n) Calcolare: $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\pi} = 1$ vedi limite fondamentale 3

o) Calcolare: $\lim_{n\to+\infty} 7^n+9^n-11^n \overset{(+\infty-\infty)}{=} \lim_{n\to+\infty} 11^n\left(\left(\frac{7}{11}\right)^n+\left(\frac{9}{11}\right)^n-1\right)$

$$= -\infty$$

p) Calcolare: $\lim_{n\to+\infty} 2^n-n^{20} \overset{+\infty-\infty}{=} \lim_{n\to+\infty} 2^n\left(1-\frac{n^{20}}{2^n}\right) =$

$$= \left(\lim_{n\to+\infty} 2^n\right)\cdot\left(\lim_{n\to+\infty}\left[1-\frac{n^{20}}{2^n}\right]\right) = +\infty\cdot 1 = +\infty$$

q) Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - n^{20} = -\infty$ (vedi limiti 1 e 5)

(8)

Calcolare:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\xi n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\xi n}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\xi}=e^{\xi}$$

Calcolare:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}\xrightarrow{}1^{\infty}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n}$$

$$\overset{(*)}{=}\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n+1}{n}}=\left(\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{-1}\right)^{\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}\right)}$$

$\boxed{(*)\text{ Moltiplicandolo e dividendolo per } 1-\frac{1}{n+1}}$ $= e^{-1}\cdot 1=\frac{1}{e}$

NOTA: nel penultimo passaggio si è usato il fatto che $\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\to e$

Calcolare: $$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^7}\right)^{n^9}\xrightarrow{}1^{\infty}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^7}\right)^{n^7n^2}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^7}\right)^{n^7}\right]^{n^2}$$

$$=+\infty$$ (vedi limite 2))

Calcolare: $$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{8}{n}\right)}{\sin\left(\frac{11}{n}\right)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{n\to+\infty}\left(8\,\frac{\sin\left(\frac{8}{n}\right)}{\frac{8}{n}\cancel{n}}\right)\left(\frac{\frac{11}{n}\cancel{n}}{\sin\left(\frac{11}{n}\right)}\right)\cdot\frac{1}{11}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{8}{11}\boxed{\left(\frac{\sin\left(\frac{8}{n}\right)}{\frac{8}{n}}\right)}\boxed{\left(\frac{\frac{11}{n}}{\sin\left(\frac{11}{n}\right)}\right)}=\frac{8}{11}$$

limite 8)

$$=\frac{8}{11}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{8}{n}\right)}{\frac{8}{n}}\right)\cdot\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{11}{n}\right)}{\frac{11}{n}}\right)=\frac{8}{11}\cdot1\cdot1=\frac{8}{11}$$

Calcolare: ⑨

$$\lim_{n\to+\infty} n\, tg\left(\frac{1}{n}\right) \overset{\infty\cdot 0}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{tg\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = 1\cdot 1 = 1$$

Calcolare:

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\frac{3}{n}\right) \overset{\infty\cdot 0}{=} \lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{\left(1-\cos\frac{3}{n}\right)\left(1+\cos\frac{3}{n}\right)}{1+\cos\frac{3}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 \sin^2\left(\frac{3}{n}\right)}{1+\cos\left(\frac{3}{n}\right)} = \left(\lim_{n\to+\infty} 3\frac{\sin\frac{3}{n}}{\frac{3}{n}}\right)\cdot\left(\lim_{n\to+\infty} 3\frac{\sin\frac{3}{n}}{\frac{3}{n}}\right)\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\cos\left(\frac{3}{n}\right)}\right)$$

$$= 3\cdot 3\cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$