"Il moto naturale passante per P_0 e P_1 ed associato alla Lagrangiana $\pounds$ è quello che rende stazionario il funzionale $I(s) = \int_{t_0}^{t_1} \pounds(t)dt$, tra tutti i moti passanti per P_0 e P_1 agli stessi istanti t_0 e t_1, rispettivamente".
Questo enunciato va sotto il nome di Principio di Hamilton o di minima azione.

La lagrangiana nei sistemi meccanici.

Per un sistema sottoposto a vincoli olonomi, bilaterali e lisci con sollecitazione conservativa di potenziale U, le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h\,,$$

$$\text{giacchè} \quad Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h}\,,\ \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_h} = 0\,, \text{ divengono}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T+U)}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial(T+U)}{\partial q_h} = 0\,,$$

cioè assumono la forma (40) con $\pounds = T + U$.
Ecco perchè anche tali equazioni sono state chiamate Equazioni di Lagrange.
Esse sussistono anche in ipotesi più generali; per esempio, basta che

$$Q_h(\underline{q}\,,\,\dot{\underline{q}}\,,\,t) = \frac{\partial U(\underline{q}\,,\,\dot{\underline{q}}\,,\,t)}{\partial q_h} - \frac{d}{dt}\frac{\partial U(\underline{q}\,,\,\dot{\underline{q}}\,,\,t)}{\partial \dot{q}_h}\,. \quad (43)$$

In tal caso si dice che la sollecitazione deriva da un potenziale generalizzato U. Si ha che
<u>Teorema</u>: "C.N.S. perchè la sollecitazione $Q_h(\underline{q}\,,\,\dot{\underline{q}}\,,\,t)$ derivi da un potenziale generalizzato è che sia lineare nelle $\dot{\underline{q}}$ ed inoltre

$$Q_h = C_{hk}(\underline{q}\,,\,t)\dot{q}_k + C_h(\underline{q}\,,\,t) \quad \text{con}$$

$$\begin{aligned} &C_{hk} = -C_{kh}\,, && (44)\\ &C_{hk,r} + C_{rh,k} + C_{kr,h} = 0 \quad , \quad C_{hk,0} = C_{h,k} - C_{k,h} && \end{aligned}$$

dove si é posto $C_{hk,r} = \dfrac{\partial C_{hk}}{\partial q_r}$, $C_{h,k} = \dfrac{\partial C_h}{\partial q_k}$, $C_{hk,0} = \dfrac{\partial C_{hk}}{\partial t}$".

Infatti, poiché il primo membro della (43) non dipende da $\ddot{q}_k$, anche il secondo membro non vi deve dipendere, cioè $\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_h} = 0$, cioè U è lineare nelle $\dot{\underline{q}}$, cioè

$$U = U_k(\underline{q}\,,\, t)\dot{q}_k + U_0(\underline{q}\,,\, t) \quad .$$

Dopo ciò la (43) é equivalente al sistema

$$\begin{cases} C_{hk} & = \frac{\partial U_k}{\partial q_h} - \frac{\partial U_h}{\partial q_k} \\ & \\ C_h & = \frac{\partial U_0}{\partial q_h} - \frac{\partial U_h}{\partial t} \,. \end{cases} \qquad (45)$$

La condizione necessaria è evidente perchè

$$\begin{aligned} & C_{hk} = -C_{kh} \quad , \\ & C_{hk,r} + C_{rh,k} + C_{kr,h} = \frac{\partial^2 U_k}{\partial q_h \partial q_r} - \frac{\partial^2 U_h}{\partial q_k \partial q_r} + \frac{\partial^2 U_h}{\partial q_r \partial q_k} - \frac{\partial^2 U_r}{\partial q_h \partial q_k} + \\ & \qquad + \frac{\partial^2 U_r}{\partial q_k \partial q_h} - \frac{\partial^2 U_k}{\partial q_r \partial q_h} = 0 \quad , \end{aligned}$$

$$C_{h,k} - C_{k,h} = \cancel{\frac{\partial^2 U_0}{\partial q_k \partial q_h}} - \frac{\partial^2 U_h}{\partial q_k \partial t} - \cancel{\frac{\partial^2 U_0}{\partial q_h \partial q_k}} + \frac{\partial^2 U_k}{\partial q_h \partial t} = C_{hk,0} \,.$$

Per quanto riguarda la condizione sufficiente, possiamo sintetizzare i passaggi nel seguente modo. Posto

$$C_{h0} = -C_{0h} = C_h \quad , \quad q_0 = t \quad ,$$

le (45) possono scriversi come $(45)_1$ ma con h e k che vanno da 0 ad N, anzichè da 1 ad N (N è il grado di libertà del sistema). Le $(44)_{1-3}$ possono scriversi come $(44)_{1-2}$ ma con h, k ed r che vanno da 0 ad N.
Nell' ipotesi che siano valide queste $(44)_{1-2}$, devo dimostrare che le $(45)_1$ ammettano soluzioni nelle incognite U_k.
Poichè la $(45)_1$ è antisimmetrica rispetto ad h e k, basterà considerare solo le equazioni con $h < k$. Possiamo far riferimento ad esse attraverso la seguente matrice di cui abbiamo cancellato gli elementi sotto la diagonale principale (ovviamente, gli elementi della diagonale principale sono zeri e le corrispon-

cioè

$$C_{hi+1,r} + C_{rh,i+1} + C_{i+1r,h} = 0 \quad ,$$

che è valida per l' ipotesi $(44)_2$. Così abbiamo completamente dimostrato che da $(45)_1$ si possono ricavare le funzioni U_h che la soddisfano.
Dopo aver dimostrato che il sistema $(45)_1$ ammette certamente una soluzione $\overline{U}_k$, cerchiamone la soluzione generale. Dalle equazioni $(45)_1$ sottraiamone le loro espressioni con $\overline{U}_k$ al posto di U_k. Troviamo così

$$0 = \frac{\partial(U_k - \overline{U}_k)}{\partial q_h} - \frac{\partial(U_h - \overline{U}_h)}{\partial q_k} \quad ,$$

le quali non sono altro che le condizioni di integrabilità del problema di determinare V da

$$U_k - \overline{U}_k = \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad .$$

Pertanto, appena trovata una soluzione particolare, quella generale si ottiene aggiungendo ad essa $\frac{\partial V}{\partial q_k}$.

La più generale forza che deriva da un potenziale generalizzato.

Applichiamo quanto sopra al caso particolare di un punto libero, soggetto ad una forza $\vec{F}$ e con coordinate lagrangiane coincidenti con le sue coordinate cartesiane x_1, x_2, x_3. In tal caso la sollecitazione è $Q_h = F_h$; perchè tale forza derivi da un potenziale generalizzato, grazie al teorema della sezione precedente, è necessario e sufficiente che

$$F_h = C_{hk}\dot{x}_k + C_h \,, \qquad \text{con} \qquad C_{hk} = -C_{kh} \quad , \qquad (46)$$

$$C_{hk,r} + C_{rh,k} + C_{kr,h} = 0 \qquad , \qquad C_{hk,0} = C_{h,k} - C_{k,h} \, .$$

Mi chiedo se la $(46)_1$ può essere scritta come $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ (Forza di Lorentz). La risposta è affermativa pur di definire $q\vec{E} = \vec{C}$, $qB_3 = C_{12}$, $-qB_2 = C_{13}$, $qB_1 = C_{23}$. In tal modo anche la $(46)_2$ è soddisfatta.
Riguardo alla $(46)_3$ noto che, se $h = k$, essa diviene $0 + C_{rh,h} + C_{hr,h} = 0$ che

è conseguenza di $(46)_2$. Lo stesso dicasi ogni volta che nella $(46)_3$ ho 2 indici uguali. Perciò basterà imporre la $(46)_3$ per $hkr = 123$, ottenendo

$$\vec{\nabla} \cdot (q\vec{B}) = 0 \,, \qquad \text{che è una delle equazioni di Maxwell.}$$

Similmente, la $(46)_4$ è $\dfrac{\partial}{\partial t}(q\vec{B}) + \vec{\nabla} \wedge (q\vec{E}) = 0$, che è un' altra delle equazioni di Maxwell.

Il potenziale generalizzato delle forze apparenti.

Le forze apparenti possono essere scritte nella stessa forma della forza di Lorentz ed è infatti facile riconoscere in $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ la forza di Coriolis $-2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$ purchè $2m\vec{\omega} = q\vec{B}$ ed in $q\vec{E}$ la forza di trascinamento $-m\vec{a}_\tau$.
Anzichè applicare la teoria generale, nel presente caso possiamo trovare l' espressione di U nel seguente modo:
Nel riferimento assoluto la lagrangiana è $\pounds = T_a + U^{eff.}$; in quello relativo è $\pounds = T_r + U^{eff.} + U^{apparenti}$ da cui

$$U^{apparenti} = T_a - T_r = \frac{1}{2}m\,(\vec{v}_r + \vec{v}_\tau)^2 - \frac{1}{2}m(\vec{v}_r)^2 = \frac{1}{2}m(\vec{v}_\tau)^2 + m\vec{v}_\tau \cdot \vec{v}_r \quad .$$

Perciò, se O è l' origine del riferimento relativo ed $\vec{\omega}$ la velocità angolare, si ha

$$U^{apparenti} = \frac{1}{2}m\,[\vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P-O)]^2 + m\,[\vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P-O)] \cdot \vec{v} \quad .$$

In particolare, per un moto traslatorio ($\vec{\omega} = \vec{0}$), si ha

$$U^{apparenti} = \frac{1}{2}m\,[\vec{v}_O]^2 + m\vec{v}_O \cdot \vec{v} \quad ,$$

per cui il sistema (45) dà

$$C_{hk} = 0 \;\;, \quad C_h = -m\ddot{x}_O \quad \text{cioè} \quad \vec{F} = -m\vec{a}_\tau \quad C.V.D. \quad .$$

Per un moto rotatorio uniforme, cioè O fisso ed $\vec{\omega}$ costante, si ha

$$U^{apparenti} = \frac{1}{2}m\,[\vec{\omega} \wedge (P-O)]^2 + m\vec{\omega} \wedge (P-O) \cdot \vec{v} \quad ,$$