

MOTO DI UN PUNTO IN UN CAMPO CENTRALE.

Si intende con questo il moto di un punto soggetto ad una forza centrale $\vec{F} = \frac{f(\rho)}{\rho}(P - O)$ con O punto fisso e $\rho = \overline{PO}$. L'equazione di moto è

$$m\vec{a} = f(\rho)\frac{P - O}{\rho}, \quad (5)$$

per cui $\vec{a} // P - O$ e quindi il moto è centrale. (Ricordiamo che il moto del punto P si dice centrale di centro il punto fisso O , se l'accelerazione di P è sempre parallela a $P - O$. In tal caso si ha $(P - O) \wedge \vec{a} = \vec{0}$, ovvero

$$(P - O) \wedge \vec{v} = \vec{c} \text{ costante.} \quad (6)$$

Infatti, la derivata temporale del primo membro è $\vec{v} \wedge \vec{v} + (P - O) \wedge \vec{a} = \vec{0}$; avendo derivata nulla, $(P - O) \wedge \vec{v}$ è costante. Si presentano allora due casi. Se $\vec{c} = \vec{0}$, il moto è rettilineo; infatti da $\vec{v} // (P - O) // \vec{a}$, $\vec{v} = \dot{s}\vec{t}$, $\vec{a} = \ddot{s}\vec{t} + \dot{s}^2\frac{d\vec{t}}{ds}$ segue $\vec{0} = \vec{v} \wedge \vec{a} = \dot{s}^2\vec{t} \wedge \frac{d\vec{t}}{ds}$; poichè \vec{t} e $\frac{d\vec{t}}{ds}$ sono ortogonali, non possono essere paralleli, a meno che $\frac{d\vec{t}}{ds} = 0$, cioè \vec{t} costante, cioè moto rettilineo.

Se $\vec{c} \neq \vec{0}$, moltiplicando scalarmente la (6) per $P - O$, si trova $\vec{c} \cdot (P - O) = 0$, equazione del piano passante per O ed ortogonale a \vec{c} . Pertanto il moto è sempre piano [anche il precedente caso di moto rettilineo può essere considerato un caso particolare di moto piano], ed avviene nel piano passante per O , per $P(0)$ e parallelo a $\vec{v}(0)$.

Mettiamoci in tale piano e prendiamo ivi coordinate polari ρ e ϑ . Si ha

$$\begin{aligned} P - O &= \rho\vec{e}_\rho, \quad \vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta, \\ \vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\vartheta}^2)\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\vartheta})\vec{e}_\vartheta \end{aligned} \quad (7)$$

per cui la (6) ci dice che $\vec{e}_\rho \wedge \vec{e}_\vartheta$ è il versore di \vec{c} , dopo di che della (6) rimane ancora

$$\rho^2\dot{\vartheta} = c = 2A \neq 0 \text{ costante,} \quad (8)$$

con A velocità areolare. Pertanto se $\vec{c} \neq \vec{0}$, il moto è piano ed avviene con velocità areolare costante).

Chiusa questa parentesi sui moti centrali, torniamo al moto in un campo centrale. In esso abbiamo un ulteriore integrale primo, cioè $T - U = E$ con

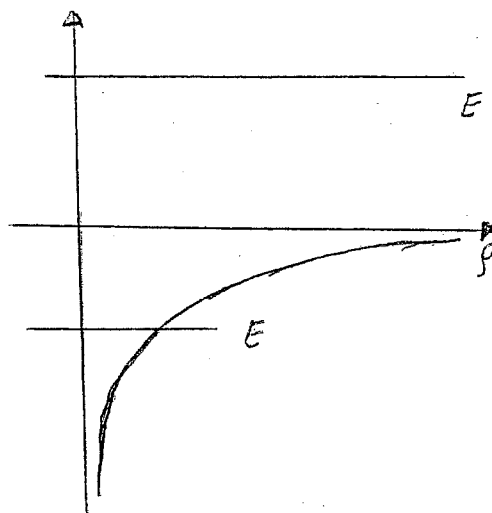
$U = \int f(\rho) d\rho$. Comunque distinguiamo anche qui i due casi.

Se $P(0) = O // \vec{v}(0)$, cioè $\vec{c} = \vec{0}$, sappiamo già che il moto è rettilineo. Proiettando l'equazione di moto (5) su questa retta, essa si riduce a

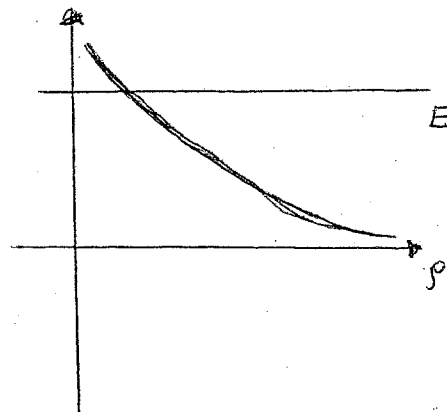
$$m\ddot{\rho} = f(\rho)$$

e l'integrale primo $T - U = E$ diviene $\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 = E - V(\rho)$ con $V = -\int f(\rho) d\rho$; si può quindi fare una discussione di Weierstrass. Interessante da considerare è il caso $f(\rho) = \frac{-h}{\rho^2}$ in quanto, per $h = GmM$ troviamo la forza gravitazionale e per $h = -\mu q_1 q_2$ troviamo la forza Coulombiana tra cariche; questa è attrattiva come quella gravitazionale se q_1 e q_2 sono di segno opposto, repulsiva se di stesso segno.

Si ha $V(\rho) = -\frac{h}{\rho}$ e la costante E si chiama energia totale. Dopo ciò si ottengono i sottostanti grafici, a sinistra quello con $h > 0$, a destra con $h < 0$.



$h > 0$



$h < 0$

Con riferimento al primo d'essi, valido per forza gravitazionale e per forza Coulombiana tra cariche di segno opposto, notiamo che:

- Se $\dot{\rho}(0) < 0$, il punto P collassa in O ;
- se $E < 0$, si ha in ogni caso il collasso dopo un eventuale iniziale allontanamento (Moto legato);
- se $E \geq 0$, $\dot{\rho}(0) > 0$, il punto si allontana indefinitamente da O .

Con riferimento al secondo dei suddetti grafici, valido per forza Coulombiana tra cariche dello stesso segno, notiamo che la carica in P si allontana indefinitamente da quella in O dopo un eventuale iniziale avvicinamento.

Se $P(0) - O$ non è parallelo a $\vec{v}(0)$, cioè $\vec{e} \neq \vec{0}$, sappiamo già che il moto è piano. Mettiamoci in tale piano e prendiamo ivi coordinate polari ρ e ϑ . Grazie alle (7), proiettando l'equazione di moto (5) su questo piano e lungo i versori \vec{e}_ρ ed \vec{e}_ϑ , essa si riduce a

$$\begin{cases} m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\vartheta}^2 = f(\rho) \\ \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\vartheta}) = 0 \end{cases} \quad \text{da cui l'integrale primo (8).} \quad (9)$$

Si noti che da (7)₂ segue $T = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\vartheta}^2)$ per cui le equazioni (9) possono essere ottenute anche attraverso le equazioni di Lagrange.

Dall'integrale primo (8) ricavo

$$\dot{\vartheta} = \frac{2A}{\rho^2} \quad (10)$$

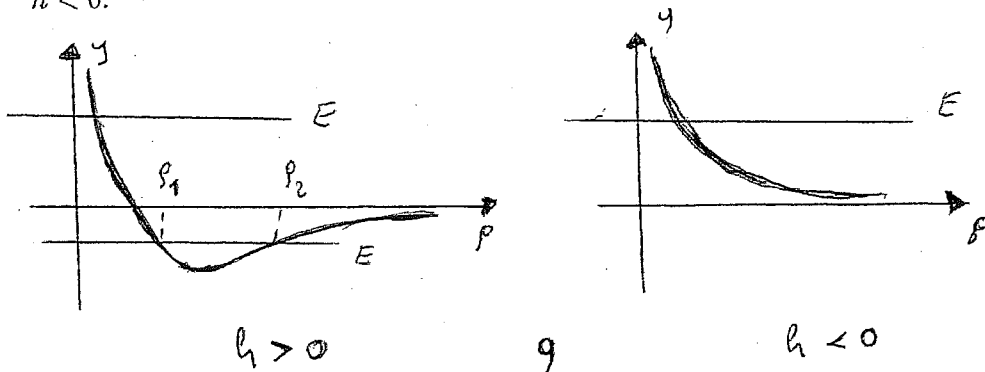
che sostituito in (9)₁ la rende

$$m\ddot{\rho} = \frac{4mA^2}{\rho^3} + f(\rho) \quad \text{da cui} \quad \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 = E - V^*(\rho) \quad (11)$$

con

$$V^*(\rho) = \frac{2mA^2}{\rho^2} - \int f(\rho)d\rho \quad (12)$$

Si noti che l'integrale primo (11)₂ si può anche ottenere da $T - U = E$ con uso della (10); dalla (11) notiamo che si può fare una discussione di Weierstrass. In particolare, se $f(\rho) = \frac{-h}{\rho^2}$ si ha $V^*(\rho) = \frac{2mA^2}{\rho^2} - \frac{h}{\rho}$. Dopo ciò si ottengono i sottostanti grafici, a sinistra quello con $h > 0$, a destra con $h < 0$.



Con riferimento al primo d'essi, valido per forza gravitazionale e per forza Coulombiana tra cariche di segno opposto, notiamo che:

- Se $E \geq 0$, il punto P si allontana indefinitamente da O dopo una eventuale iniziale fase di avvicinamento;
- se $E < 0$, il punto oscilla tra una distanza minima ρ_1 ed una massima ρ_2 (Moto legato).

Con riferimento al secondo dei suddetti grafici, valido per forza Coulombiana tra cariche dello stesso segno, notiamo che la carica in P si allontana indefinitamente da quella in O dopo un eventuale iniziale avvicinamento. Preoccupiamoci ora della traiettoria del punto P .

$$\text{Si ha } \dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\vartheta} \dot{\vartheta} = \frac{d\rho}{d\vartheta} \frac{2A}{\rho^2} = \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{-2A}{\rho} \right).$$

Perciò l'integrale primo (11) diviene

$$2A^2 m \left[\frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]^2 = E - \frac{2mA^2}{\rho^2} + \frac{h}{\rho}, \quad (13)$$

che, derivata rispetto a ϑ , e semplificando $\frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{1}{\rho} \right)$, diviene

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} = \frac{h}{4mA^2}. \quad (14)$$

Questa è l'equazione dei moti armonici, solo che ϑ prende il posto del tempo, ed $\omega = 1$; perciò possiamo scrivere subito la sua soluzione, cioè

$$\frac{1}{\rho} = \frac{h}{4mA^2} [1 + e \cos(\vartheta + \delta)] \quad \text{ovvero} \quad \rho = \frac{\frac{4mA^2}{h}}{1 + e \cos(\vartheta + \delta)} \quad (15)$$

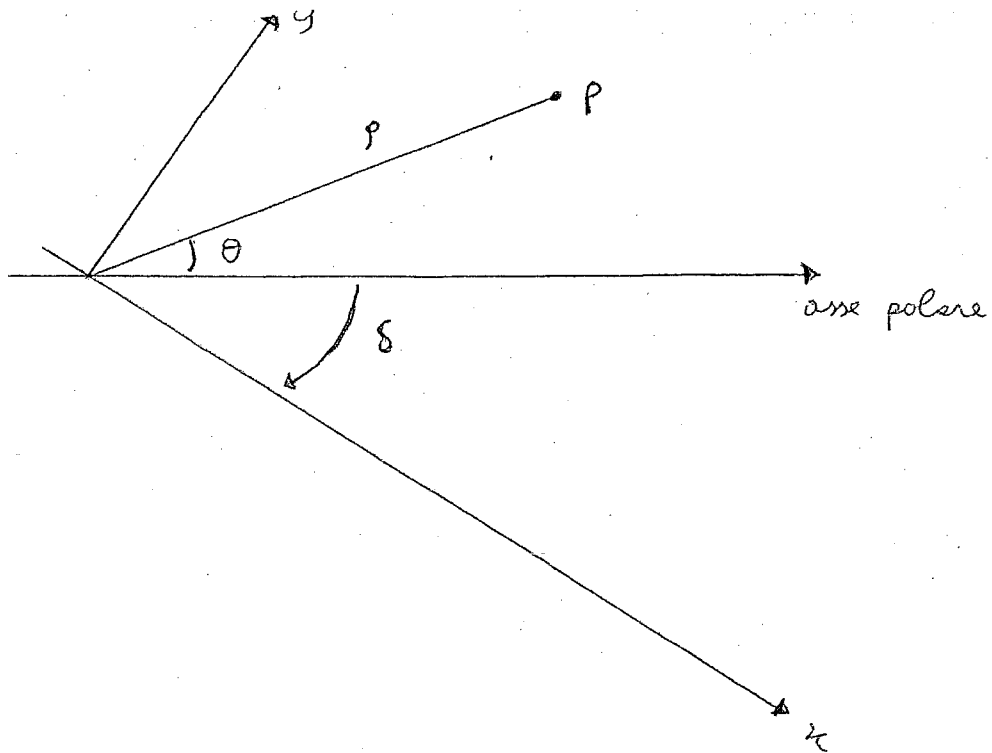
con $e > 0$ e δ costanti di integrazione.

Vedremo che la (15)₂ è l'equazione di una conica in coordinate polari essendo e l'eccentricità. Sostituendola nella (13) si ottiene

$$E = \frac{h^2}{8mA^2} (e^2 - 1),$$

per cui $E > 0$ equivale ad $e > 1$ nel qual caso vedremo che la conica è un ramo di iperbole, $E = 0$ ad $e = 1$ (parabola), ed $E < 0$ ad $e < 1$, cioè una ellisse. Si noti che la (14) poteva essere ottenuta anche da (11)₁ esprimendo $\dot{\rho}$ tramite derivate rispetto a ϑ .

Procediamo, come detto prima, con lo studio dell' equazione (15)₂.



Prendendo come asse dell' x la retta passante per O che forma un angolo $-\delta$ con l'asse polare, si ha

$$x = \rho \cos(\vartheta + \delta) \quad , \quad y = \rho \sin(\vartheta + \delta).$$

Perciò la $(15)_2$ diviene $\rho + ex = \frac{4mA^2}{h}$ da cui $\rho = \frac{4mA^2}{h} - ex$ che, elevata al quadrato, diviene

$$\begin{cases} \rho^2 = \left(\frac{4mA^2}{h} - ex\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{4mA^2}{h} - ex\right)^2 \\ \frac{4mA^2}{h} - ex \geq 0 \end{cases} \quad (16)$$

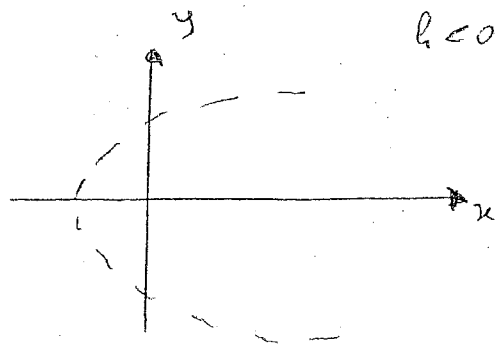
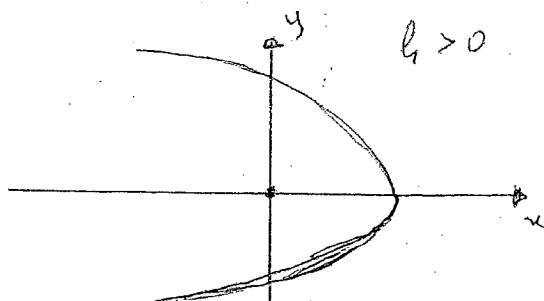
(La $(16)_2$ è da includere onde poter scartare le eventuali soluzioni estranee introdotte con l'elevazione al quadrato). Pertanto la conica $(16)_1$, in coordinate cartesiane, è

$$x^2(1 - e^2) + y^2 + e \frac{8mA^2}{h} x - \frac{16m^2 A^4}{h^2} = 0. \quad (17)$$

Se $e = 1$ essa può essere scritta come

$$y^2 = \frac{8mA^2}{-h} \left(x - \frac{2mA^2}{h} \right), \quad (18)$$

che, confrontata con l'equazione canonica $Y^2 = 2pX$, ci mostra che la nostra conica è una parabola con $p = \frac{4mA^2}{-h}$ e che ha come vertice il punto $x = \frac{2mA^2}{h}$, $y = 0$ e come fuoco il punto la cui ascissa si ottiene aggiungendo $\frac{p}{2}$ a quella del vertice e la cui ordinata è zero; in altre parole, O è il fuoco. Inoltre, dalla (18) per $h > 0$ si trova $x \leq \frac{2mA^2}{h} < \frac{4mA^2}{h}$ per cui la $(16)_2$ è rispettata. In altre parole, nel caso di forza gravitazionale o di forza Coulombiana attrattiva, non sono state introdotte soluzioni reali estranee con l'elevazione al quadrato e la parabola è tutta la traiettoria. Invece, nel caso di forza Coulombiana repulsiva, cioè $h < 0$, dalla (18) si trova $x \geq \frac{2mA^2}{h} > \frac{4mA^2}{h}$, contro la $(16)_2$; perciò tutta la parabola è fatta di soluzioni reali estranee introdotte con l'elevazione al quadrato. Questo concorda con i risultati della discussione di Weierstrass fatta prima, dove avevamo visto che si aveva la banda permessa solo per $E > 0$, cioè $e > 1$, mentre per $h > 0$ si aveva una banda permessa anche per $E = 0$, cioè $e = 1$, e tale banda permessa era risultata una semiretta.



Se $e \neq 1$ la (17) può essere scritta come

$$\frac{\left(x + \frac{4mA^2e}{h(1-e^2)}\right)^2}{\left(\frac{4mA^2}{|h|(1-e^2)}\right)^2} + \frac{1-e^2}{|1-e^2|} \frac{y^2}{\left(\frac{4mA^2}{|h|\sqrt{|1-e^2|}}\right)^2} = 1. \quad (19)$$

Se $e < 1$, la (19), confrontata con l'equazione canonica $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ci mostra che la nostra conica è un'ellisse di semiassi

$$a = \frac{4mA^2}{|h|(1-e^2)}, \quad b = \frac{4mA^2}{|h|\sqrt{1-e^2}} \quad \text{da cui} \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{4mA^2}{|h|(1-e^2)}e = ae. \quad (20)$$

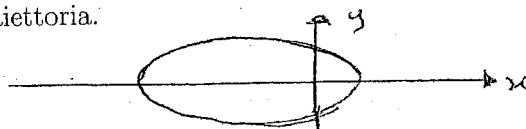
il centro il punto di coordinate

$$x = -\frac{4mA^2e}{h(1-e^2)}, \quad y = 0.$$

Pertanto, O è uno dei due fuochi ed e è l'eccentricità; inoltre, dalla (19) con $h > 0$ segue

$$x + \frac{4mA^2e}{h(1-e^2)} \leq a \quad \text{da cui} \quad x \leq \frac{4mA^2}{h(1-e^2)}(1-e) = \frac{4mA^2}{h(1+e)} < \frac{4mA^2}{he};$$

(Si è sfruttato il fatto che, dividendo per un numero più piccolo, si ottiene un risultato più grande); questo risultato mostra che la condizione (16)₂ è rispettata. In altre parole, nel caso di forza gravitazionale o di forza Coulombiana attrattiva, non sono state introdotte soluzioni reali estranee con l'elevazione al quadrato e l'ellisse è tutta la traiettoria.

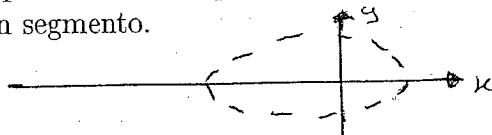


Invece, nel caso di forza Coulombiana repulsiva, cioè $h < 0$, dalla (19) si trova

$$x + \frac{4mA^2e}{h(1-e^2)} \geq -a \quad \text{da cui} \quad x \geq \frac{4mA^2}{h(1-e^2)}(1-e) = \frac{4mA^2}{h(1+e)} > \frac{4mA^2}{he},$$

(È vero che, dividendo per un numero più piccolo, si ottiene un risultato più grande, ma h è negativo ...) contro la (16)₂; perciò tutta l'ellisse è fatta

di soluzioni reali estranee introdotte con l' elevazione al quadrato. Questo concorda con i risultati della discussione di Weierstrass fatta prima, dove avevamo visto che si aveva la banda permessa solo per $E > 0$, cioè $e > 1$, mentre per $h > 0$ si aveva una banda permessa anche per $E < 0$, cioè $e < 1$, e tale banda permessa era risultata un segmento.



Se $e > 1$, la (19), confrontata con l' equazione canonica $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, ci mostra che la nostra conica è un' iperbole di semiassi

$$a = \frac{4mA^2}{|h|(e^2 - 1)}, \quad b = \frac{4mA^2}{|h|\sqrt{e^2 - 1}} \quad \text{da cui} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{4mA^2}{|h|(e^2 - 1)}e = ae. \quad (21)$$

e di centro il punto di coordinate

$$x = -\frac{4mA^2e}{h(1 - e^2)}, \quad y = 0$$

Pertanto, O è uno dei due fuochi ed e è l' eccentricità. Naturalmente, l' iperbole ha due rami. Nel caso $h > 0$ uno dei due rami è quello con

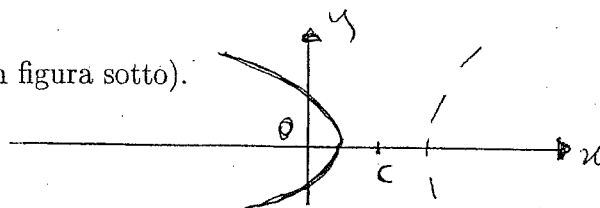
$$x + \frac{4mA^2e}{h(1 - e^2)} \geq a \quad \text{da cui} \quad x \geq \frac{4mA^2}{h(e^2 - 1)}(1 + e) = \frac{4mA^2}{h(e - 1)} > \frac{4mA^2}{he};$$

(Si è sfruttato il fatto che, dividendo per un numero più grande, si ottiene un risultato più piccolo); questo risultato mostra che la condizione (16)₂ non è rispettata. In altre parole, questo ramo d' iperbole è fatto da soluzioni reali estranee introdotte con l' elevazione al quadrato e pertanto da scartare. Invece, per l' altro ramo dell' iperbole, si ha.

$$x + \frac{4mA^2e}{h(1 - e^2)} \leq -a \quad \text{da cui} \quad x \leq \frac{4mA^2}{h(e^2 - 1)}(-1 + e) = \frac{4mA^2}{h(e + 1)} < \frac{4mA^2}{he};$$

pertanto, per questo ramo d' iperbole, la condizione (16)₂ è rispettata. In altre parole, nel caso di forza gravitazionale o di forza Coulombiana attrattiva, la traiettoria è il ramo d' iperbole che volge la concavità verso O (Si noti che la x del centro è positiva e quindi a destra di O , per cui l' altro fuoco è a sua volta a destra del centro; abbiamo trovato che il ramo di iperbole da non escludere è quello i cui punti hanno ascissa minore di quella del centro.

Perciò si ha la situazione come in figura sotto).



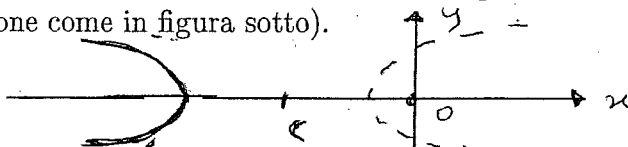
Invece, nel caso di forza Coulombiana repulsiva, cioè $h < 0$, uno dei rami di iperbole è caratterizzato da

$$x + \frac{4mA^2e}{h(1-e^2)} \geq a \quad \text{da cui} \quad x \geq \frac{4mA^2}{h(1-e^2)}(1-e) = \frac{4mA^2}{h(1+e)} > \frac{4mA^2}{he},$$

(È vero che, dividendo per un numero più piccolo, si ottiene un risultato più grande, ma h è negativo) contro la $(16)_2$; perciò per tutto questo ramo d' iperbole la condizione $(16)_2$ non è rispettata. In altre parole, questo ramo d' iperbole è fatto da soluzioni reali estranee introdotte con l' elevazione al quadrato e pertanto da scartare. Invece, per l' altro ramo dell' iperbole, si ha

$$x + \frac{4mA^2e}{h(1-e^2)} \leq -a \quad \text{da cui} \quad x \leq \frac{4mA^2}{h(e^2-1)}(1+e) = \frac{4mA^2}{h(e-1)} < \frac{4mA^2}{he};$$

pertanto, per questo ramo d' iperbole, la condizione $(16)_2$ è rispettata. In altre parole, nel caso di forza Coulombiana repulsiva, la traiettoria è il ramo d' iperbole che volge la convessità verso O (Si noti che la x del centro in quest caso è negativa e quindi a sinistra di O , per cui l' altro fuoco è a sua volta a sinistra del centro; abbiamo trovato che il ramo di iperbole da non escludere è quello i cui punti hanno ascissa minore di quella del centro, per cui si ha la situazione come in figura sotto).



Questo concorda con i risultati della discussione di Weierstrass fatta prima, dove avevamo visto che per $E > 0$ si aveva come banda permessa una semiretta.

In tal modo abbiamo dimostrato le prime due leggi di Keplero:

1. I pianeti descrivono delle ellissi (i corpi che percorrono parabole o iperboli si allontanano definitivamente e non sono più osservabili).
2. Tali ellissi vengono percorse con velocità areolare costante.

Rimane da dimostrare la 3^a legge di Keplero:

3. Il rapporto tra i quadrati dei tempi di rivoluzione ed il cubo del semiasse maggiore è uguale per tutti i pianeti.

Infatti, poichè la velocità areolare è costante, si ha

$$A = \frac{\pi ab}{T}; \quad \text{per cui} \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{\pi^2 b^2}{A^2 a} = \frac{4\pi^2 m}{h} = \frac{4\pi^2}{GM},$$

che non dipende da m .

IL PROBLEMA DEI DUE CORPI

Si tratta di due punti P di massa m ed O di massa M , soggetti alle forze $\vec{F} = \frac{f(\rho)}{\rho}(P - O)$, P e $-\vec{F}$, O con $\rho = \overline{PO}$. Le equazioni di moto sono

$$\begin{cases} m\ddot{P} = \vec{F} \\ M\ddot{O} = -\vec{F} \end{cases}$$

Nel riferimento che ha origine in O ed assi paralleli ed equiversi a quelli del riferimento inerziale, il punto P è soggetto anche alla forza apparente

$$-m\vec{a}_r = -m\ddot{O} = \frac{m}{M}\vec{F};$$

perciò l'equazione di moto di P in tale riferimento è

$$m\ddot{P} = \vec{F} + \frac{m}{M}\vec{F} = \frac{m+M}{M}\vec{F} \quad \text{da cui} \quad \ddot{P} = \frac{m+M}{mM}\vec{F}. \quad (22)$$

Perciò si possono ripetere tutte le considerazioni fatte per i moti in campi centrali ottenendo gli stessi risultati, ad eccezione della 3^a legge di Keplero. Infatti, nel caso di forza gravitazionale l'equazione (22) diviene

$$m\ddot{P} = -\frac{Gm(M+m)}{\rho^3}(P-O),$$

cioè rimane la stessa che si avrebbe se O fosse fisso, pur di sostituire M con $M+m$. Pertanto la terza legge di Keplero diviene

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)},$$

che dipende dalla massa m del pianeta. Ovviamente si ha anche

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM(1+\frac{m}{M})} \simeq \frac{4\pi^2}{GM},$$

in quanto $\frac{m}{M}$ è molto piccolo; pertanto, la 3^a legge di Keplero è ancora valida, ma in maniera approssimata.

Si noti che le equazioni di moto potevano essere studiate anche nel riferimento baricentrale che è inerziale perchè, essendo il sistema isolato, il suo baricentro si muove di moto rettilineo uniforme. I calcoli non sarebbero stati complicati perchè, dalla definizione di baricentro, si ha

$$(m+M)(G-P) = m(P-P) + M(O-P) \quad \text{da cui} \quad P-O = \frac{m+M}{M}(P-G),$$

per cui l'equazione

$$m\ddot{P} = \frac{f(\rho)}{\rho}(P-O) \quad \text{diviene} \quad m\ddot{P} = \frac{f^*(\rho^*)}{\rho^*}(P-G)$$

$$\text{con} \quad \rho^* = \overline{PG}, \quad f^* = f\left(\frac{m+M}{M}\rho^*\right).$$

La complicazione sta invece a livello di osservazioni astronomiche perchè non si può identificare un riferimento avente origine in un punto non materiale; molto meglio invece se l'origine è in O , cioè nel sole.