

Per questo sono dette *momenti cinetici* coniugati alle rispettive  $q_k$ . Vedremo nel seguito che le variabili  $p_k$  hanno grande rilievo nella meccanica analitica.

Ora osserviamo che la matrice  $\|a_{hk}\|$  non è altro che la matrice hessiana di  $T$  rispetto alle  $\dot{q}_k$ :

$$a_{hk} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \quad [3.13]$$

Indicando quest'ultima con  $\mathbf{H}_T$  potremo riscrivere la [3.6]

$$\hat{T} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{H}_T \dot{\mathbf{q}} \quad [3.14]$$

Come conseguenza del teorema 3.1 abbiamo il

3.1 COROLLARIO La matrice  $\mathbf{H}_T$  è definita positiva:

$$\det(\mathbf{H}_T) > 0 \quad [3.15]$$

3.1 Osservazione

Definendo

$$\hat{p}_k = \sum_{h=1}^{\ell} a_{hk} \dot{q}_h,$$

è utile notare che  $\hat{T} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{q}}$  e quindi che

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad [3.16]$$

nel caso di vincoli fissi.

Ritorniamo ora al nostro scopo originale, che era quello di esprimere il primo membro della [2.10] in funzione di  $T$ . Non resta che derivare i due membri della [3.12] rispetto al tempo:

$$\dot{p}_k = (\dot{Q})_{\Theta,k} + Q \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial q_k} \quad [3.17]$$

e osservare che

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial v_i} = \frac{\partial T}{\partial v_i} \quad [3.18]$$

per cui si ottiene infine

$$(\dot{Q})_{\Theta,k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \quad [3.19]$$

Le [2.10] si scrivono pertanto nella forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = F_{\Theta,k}, \quad k = 1, \dots, \ell, \quad [3.20]$$

nella quale sono conosciute come *equazioni di Lagrange*. Le  $F_{\Theta,k}$  sono date dal [2.11]. Le [3.20] sono sufficienti a risolvere il problema del moto:

3.2 TEOREMA Le equazioni di Lagrange [3.20] ammettono una e una sola soluzione soddisfacente le condizioni iniziali

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{w}_0. \quad [3.21]$$

*Dimostrazione*

Le [3.20] sono equazioni del secondo ordine lineari rispetto alle  $\ddot{q}_k$ . La matrice dei coefficienti delle  $\ddot{q}_k$  non è altro che  $\mathbf{H}_T$ , come si deduce derivando la [3.11] rispetto al tempo. Perciò, grazie al corollario 3.1, il sistema [3.20] è risolvibile rispetto alle  $\ddot{q}_k$ , ossia si può mettere in *forma normale*

$$\ddot{q}_k = \chi_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad k = 1, \dots, \ell, \quad [3.22]$$

dove le funzioni  $\chi_k$  sono facilmente deducibili. Esse contengono in particolare le  $F_{\Theta,k}$ , che sono prescritte funzioni di  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t$ , che si sottintendono regolari. L'asserto del teorema rientra a questo punto nella teoria dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie.<sup>1</sup>

3.2 Osservazione

Le [3.20] mostrano chiaramente che il vettore  $\mathbf{F}^{(a)}$  influisce sul moto soltanto attraverso la sua proiezione sullo spazio tangente.

3.3 Osservazione

Consideriamo un punto materiale di massa  $m$  vincolato a muoversi su una superficie regolare liscia fissa  $S \subseteq \mathbf{R}^3$  in assenza di forze attive. Se  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q_1, q_2)$  è una parametrizzazione locale di  $S$ , è immediato verificare che l'energia cinetica del punto si scrive

$$T = \frac{m}{2} [E(q_1, q_2) \dot{q}_1^2 + 2F(q_1, q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + G(q_1, q_2) \dot{q}_2^2], \quad [3.23]$$

dove  $E, F, G$  sono le funzioni componenti la prima forma fondamentale della superficie [6.13 cap. 1]. Poiché non ci sono forze attive,  $F_{\Theta_1} = F_{\Theta_2} = 0$  e le equazioni di Lagrange [3.20] si scrivono

$$\begin{aligned} E\ddot{q}_1 + F\ddot{q}_2 + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial E}{\partial q_1} \right) \dot{q}_1^2 + 2 \frac{\partial E}{\partial q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \left( 2 \frac{\partial F}{\partial q_2} - \frac{\partial G}{\partial q_1} \right) \dot{q}_2^2 \right] &= 0, \\ F\ddot{q}_1 + G\ddot{q}_2 + \frac{1}{2} \left[ \left( 2 \frac{\partial F}{\partial q_1} - \frac{\partial E}{\partial q_2} \right) \dot{q}_1^2 + 2 \frac{\partial G}{\partial q_1} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{\partial G}{\partial q_2} \dot{q}_2^2 \right] &= 0, \end{aligned} \quad [3.24]$$

nelle quali riconosciamo le equazioni delle geodetiche della superficie [6.29 cap. 1]. Ritroviamo quindi che *le traiettorie percorse da un punto materiale vincolato ad una superficie liscia in assenza di forze attive sono le geodetiche della superficie* (proposizione 4.2, cap. 2). Si osservi inoltre che ciò comporta che l'accelerazione del punto è normale alla superficie, in accordo con la [2.5]. ■

### 3.1 Esempio

Consideriamo un punto materiale vincolato a muoversi su una superficie di rotazione in assenza di forze attive. Se  $\mathbf{x} = (u \cos v, u \sin v, f(u))$  è una parametrizzazione locale, l'energia cinetica del punto vale

$$T = \frac{m}{2} \{ [1 + (f'(u))^2] \dot{u}^2 + u^2 \dot{v}^2 \}$$

e le equazioni di Lagrange sono le equazioni delle geodetiche che abbiamo discusso e risolto nell'esempio 6.12 del capitolo 1. ■

A una conclusione analoga si perviene considerando un sistema olonomo *fisso* a vincoli lisci in assenza di forze esterne. In questo caso la varietà  $\mathcal{V}$  delle configurazioni diventa una varietà riemanniana se viene dotata della metrica

$$(ds)^2 = \sum_{i,j=1}^{\ell} a_{ij}(q_1, \dots, q_{\ell}) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad [3.25]$$

con gli  $a_{ij}$  dati dalla [3.2]: il teorema 3.1 assicura infatti che la [3.25] definisce una metrica riemanniana (cfr. definizione 7.11, cap. 1).

Le equazioni di Lagrange per questo sistema si scrivono

$$\sum_{j=1}^{\ell} a_{ij} \ddot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{\ell} \left( \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k = 0, \quad [3.26]$$

dove  $i = 1, \dots, \ell$ . Moltiplicando per  $a^{hi}$  e sommando su  $i$  (dove  $a^{hi}$  sono le componenti della matrice inversa di  $A = (a_{ij})$ ), poiché  $\sum_{i=1}^{\ell} a^{hi} a_{ij} = \delta_j^h$ , la [3.26] diventa

dove  $h = 1, \dots, \ell$  e  $\Gamma_{j,k}^h$  sono i simboli di Christoffel [7.15 cap. 1] associati alla metrica [3.25]. Si riconosce nelle [3.27] l'equazione delle geodetiche [7.14 cap. 1] e abbiamo pertanto dimostrato il seguente

**3.3 TEOREMA** *La varietà delle configurazioni di un sistema olonomo a vincoli fissi diventa una varietà riemanniana con la metrica [3.25] indotta dall'energia cinetica. In assenza di forze attive, le traiettorie del sistema sono le geodetiche di questa varietà riemanniana.*

I sistemi meccanici del tipo appena considerato sono anche detti *sistemi lagrangiani naturali* (cfr. Arnol'd, Kozlov, Neishtadt 1988).

### 3.2 Esempio

Scrivere le equazioni di Lagrange per un sistema di due punti  $(P_1, m_1)$ ,  $(P_2, m_2)$  con  $P_1$  vincolato su una circonferenza di raggio  $R$  e centro  $O$ ,  $P_2$  vincolato a muoversi sulla retta  $OP_1$ , in presenza delle seguenti forze attive nel piano della circonferenza:

$F_1$ , applicata in  $P_1$ , di modulo costante e tangente alla circonferenza,

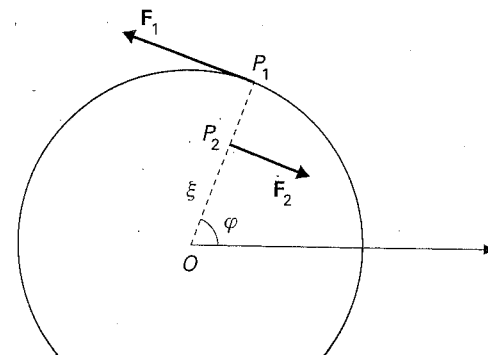
$F_2$ , applicata in  $P_2$ , di modulo costante, parallela a  $F_1$  e di verso opposto.

I vincoli sono lisci.

Il sistema ha due gradi di libertà, e possono assumersi come coordinate lagrangiane l'angolo  $\varphi$  formato dal raggio  $OP_1$  con un asse fisso e l'ascissa  $\xi$  di  $P_2$  sul raggio  $OP_1$  (fig. 3.1).

L'energia cinetica si scrive immediatamente

$$T = \frac{1}{2} m_1 R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\xi^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{\xi}^2). \quad [3.28]$$



## 6.5 Osservazione

Una parametrizzazione di una superficie si dice *ortogonale* se  $F = 0$ :

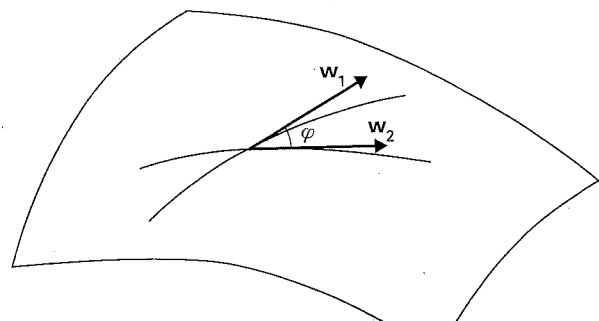
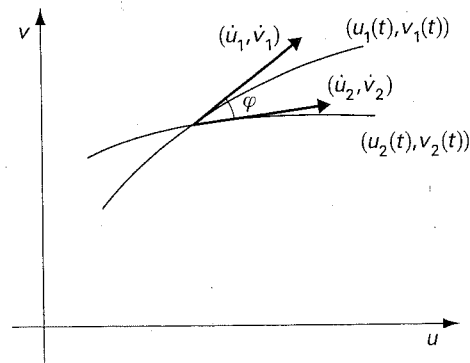
$$(ds)^2 = E(u, v)(du)^2 + G(u, v)(dv)^2.$$

In questo caso le curve sulla superficie  $\mathbf{x}(u, v_0)$ ,  $\mathbf{x}(u_0, v)$  ottenute fissando uno dei due parametri sono ortogonali tra loro. Se inoltre si ha  $E = G = g(u, v)$ , per cui

$$(ds)^2 = g(u, v)((du)^2 + (dv)^2)$$

la parametrizzazione si dice *conforme*, perché l'angolo tra due direzioni misurato sulla superficie è uguale a quello euclideo (fig. 6.7). Si può dimostrare (cfr. Dubrovin, Fomenko, Novikov 1991) che data una superficie esistono sempre coordinate ortogonali ed anche coordinate conformi. ■

Tra tutte le curve su una superficie, una classe merita un'attenzione particolare: le *geodetiche*, che, come vedremo, occupano un ruolo importantissimo in meccanica.



Sia  $S = F^{-1}(0)$  una superficie regolare e  $\mathbf{x}(u, v)$  una sua rappresentazione parametrica. Consideriamo una curva sulla superficie parametrizzata rispetto al parametro naturale  $s$

$$s \rightarrow (u(s), v(s)) \rightarrow \mathbf{x}(u(s), v(s)). \quad [6.20]$$

Il versore tangente  $\mathbf{t}$  alla curva è dato da

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d\mathbf{x}}{ds}(s) = u'(s)\mathbf{x}_u(u(s), v(s)) + v'(s)\mathbf{x}_v(u(s), v(s)) \in T_{\mathbf{x}(u(s), v(s))}S$$

e quello normale  $\mathbf{n}$  da

$$\mathbf{n}(s) = \frac{1}{k(s)} \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = \frac{1}{k(s)} (u''\mathbf{x}_u + (u')^2\mathbf{x}_{uu} + 2u'v'\mathbf{x}_{uv} + (v')^2\mathbf{x}_{vv} + v''\mathbf{x}_v), \quad [6.21]$$

dove  $k(s)$  è la curvatura della curva,  $\mathbf{x}_{uu} = \frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial u^2}$ ,  $\mathbf{x}_{uv} = \frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial u\partial v}$  e  $\mathbf{x}_{vv} = \frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial v^2}$ .

6.7 DEFINIZIONE La curva [6.20] si dice *geodetica* se in ogni punto della curva il versore normale  $\mathbf{n}$  alla curva appartiene allo spazio normale alla superficie, cioè se

$$\mathbf{n}(s) \in (T_{\mathbf{x}(u(s), v(s))}S)^\perp \quad [6.22]$$

per ogni  $s$ , ovvero se e solo se

$$\begin{cases} \mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{x}_u(u(s), v(s)) = 0, \\ \mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{x}_v(u(s), v(s)) = 0. \end{cases} \quad [6.23]$$

## 6.6 Osservazione

Data una curva con parametrizzazione arbitraria, detta  $s = s(t)$  la legge oraria, la sua accelerazione  $\mathbf{a}$  è data dalla [3.4], e la condizione perché essa sia una geodetica consiste in questo caso nell'imporre che l'accelerazione sia normale alla superficie.

La condizione di geodetica per una curva nello spazio euclideo  $\mathbf{R}^3$  è soddisfatta dalle rette, per le quali  $\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = 0$ . Per una curva su una superficie non si può in generale richiedere che l'accelerazione sia nulla, a meno che la superficie non contenga una retta. Si impone allora, poiché in generale  $\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \neq 0$ , che almeno l'accelerazione  $\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}$  sia ortogonale alla superficie  $S$ , come avviene per il moto

## 6.10 Esempio

È facile rendersi conto che sulla sfera i cerchi massimi sono geodetiche, mentre su un cilindro a sezione normale circolare le rette generatrici e le eliche, comprese quelle che degenerano in circonferenze, sono geodetiche (cfr. esempio 4.1). ■

Dalle [6.21] e [6.23] non è difficile ricavare un sistema di equazioni differenziali ordinarie soddisfatte dalle geodetiche:

$$\begin{cases} (u''\mathbf{x}_u + (u')^2\mathbf{x}_{uu} + 2u'v'\mathbf{x}_{uv} + (v')^2\mathbf{x}_{vv} + v''\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_u = 0 \\ (u''\mathbf{x}_u + (u')^2\mathbf{x}_{uu} + 2u'v'\mathbf{x}_{uv} + (v')^2\mathbf{x}_{vv} + v''\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_v = 0. \end{cases} \quad [6.24]$$

Ricordiamo che  $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u$ ,  $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v$  e  $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$ , e osserviamo che

$$\frac{\partial E}{\partial u} = 2\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u,$$

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 2\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u + \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v,$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u,$$

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 2\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v,$$

$$\frac{\partial G}{\partial v} = 2\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v,$$

e quindi le equazioni [6.24] diventano

$$Eu'' + Fv'' + \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} (u')^2 + \frac{\partial E}{\partial v} u'v' + \left( \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \right) (v')^2 = 0, \quad [6.25]$$

$$Fu'' + Gv'' + \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v} (v')^2 + \frac{\partial G}{\partial u} u'v' + \left( \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \right) (u')^2 = 0.$$

Se indichiamo con

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad [6.26]$$

la matrice rappresentativa della prima forma fondamentale, e con

$$g^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \quad [6.27]$$

la matrice inversa, si possono introdurre i cosiddetti *simboli di Christoffel*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 g^{kl} \left( \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right), \quad [6.28]$$

dove si è posto  $u^1 = u$ ,  $u^2 = v$ . Usando i simboli di Christoffel è immediato verificare che il sistema [6.25] di equazioni differenziali delle geodetiche assume la forma seguente particolarmente semplice:

$$\frac{d^2 u^k}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0, \quad k = 1, 2. \quad [6.29]$$

## 6.11 Esempio

Per il cilindro  $x_1 = \cos v$ ,  $x_2 = \sin v$ ,  $x_3 = u$ , abbiamo  $E = G = 1$ ,  $F = 0$  e le [6.25] danno semplicemente  $u'' = v'' = 0$ , cioè  $u = as + b$ ,  $v = cs + d$ , con  $a, b, c, d$  costanti arbitrarie. Per  $c = 0$  troviamo le generatrici, per  $a = 0$  le circonferenze e negli altri casi abbiamo  $v - d = \frac{c}{a}(u - b)$ , ossia delle eliche. ■

## 6.12 Esempio

La prima forma fondamentale di una superficie di rotazione con la parametrizzazione  $\mathbf{x} = (u \cos v, u \sin v, f(u))$  si scrive

$$(ds)^2 = [1 + (f'(u))^2](du)^2 + u^2(dv)^2, \quad [6.30]$$

da cui segue che i simboli di Christoffel valgono

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{f'(u)f''(u)}{1 + (f'(u))^2}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{u}{1 + (f'(u))^2},$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{u},$$

mentre  $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0$ . L'equazione delle geodetiche [6.29] sulla superficie equivale quindi al sistema

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{f'(u)f''(u)}{1 + (f'(u))^2} \left( \frac{du}{ds} \right)^2 - \frac{u}{1 + (f'(u))^2} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 = 0, \quad [6.31]$$

$$\frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{2}{u} \left( \frac{du}{ds} \right) \left( \frac{dv}{ds} \right) = 0.$$

La seconda delle [6.31] si può riscrivere come

$$1 \quad d \left[ \frac{dv}{ds} \right] = 0$$

da cui segue che esiste una costante  $c \in \mathbf{R}$  tale che per ogni  $s$

$$u^2 \frac{dv}{ds} = c, \quad [6.32]$$

ovvero, se  $c \neq 0$ ,  $ds = \frac{1}{c} u^2 dv$ , che sostituita nella prima forma fondamentale [6.30] dà la relazione

$$u^4 (dv)^2 = c^2 [1 + (f'(u))^2] (du)^2 + c^2 u^2 (dv)^2; \quad [6.33]$$

questo permette di eliminare  $ds$  e considerare  $v$  come funzione di  $u$ . Le geodetiche su una superficie di rotazione hanno quindi la forma implicita

$$v - v_0 = \pm c \int_{u_0}^u \frac{\sqrt{1 + (f'(\xi))^2}}{\xi \sqrt{\xi^2 - c^2}} d\xi. \quad [6.34]$$

Se  $c = 0$ , dalle [6.32] segue che  $u^2 \frac{dv}{ds} = 0$ , cioè che  $v$  è costante: i *meridiani* sono geodetiche. Al contrario, i *paralleli* (cioè le curve corrispondenti a  $u = \text{costante}$ ) sono geodetiche solo se

$$\frac{u}{1 + (f'(u))^2} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2 v}{ds^2} = 0,$$

cioè solo se  $\frac{dv}{ds}$  è a sua volta costante e se  $\frac{dx_3}{du} = f'(u) = \infty$ , il che implica che lungo il parallelo considerato i piani tangenti alla superficie inviluppano un cilindro con generatrici parallele all'asse  $x_3$ .

La relazione [6.32] ha un'interessante conseguenza. Sia  $\alpha$  l'angolo tra la geodetica  $(u(s), v(s))$  in  $s = s_0$  e il meridiano  $v = v(s_0)$  (fig. 6.8). È immediato verificare che  $u(s_0) \frac{dv}{ds}(s_0) = \sin \alpha$ , poiché il versore tangente al parallelo è semplicemente  $(-\sin v, \cos v, 0)$ ; quindi sostituendo nella [6.32] troviamo il *teorema di Clairaut*:

$$u(s) \sin \alpha(s) = c \quad [6.35]$$

Pertanto la geodetica deve appartenere alla regione  $u(s) \geq |c|$ .

Nel caso di una superficie di rotazione con una cuspidi "all'infinito", cioè tale che  $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = \infty$  (fig. 6.9), ogni geodetica, raggiunto il valore minimo di

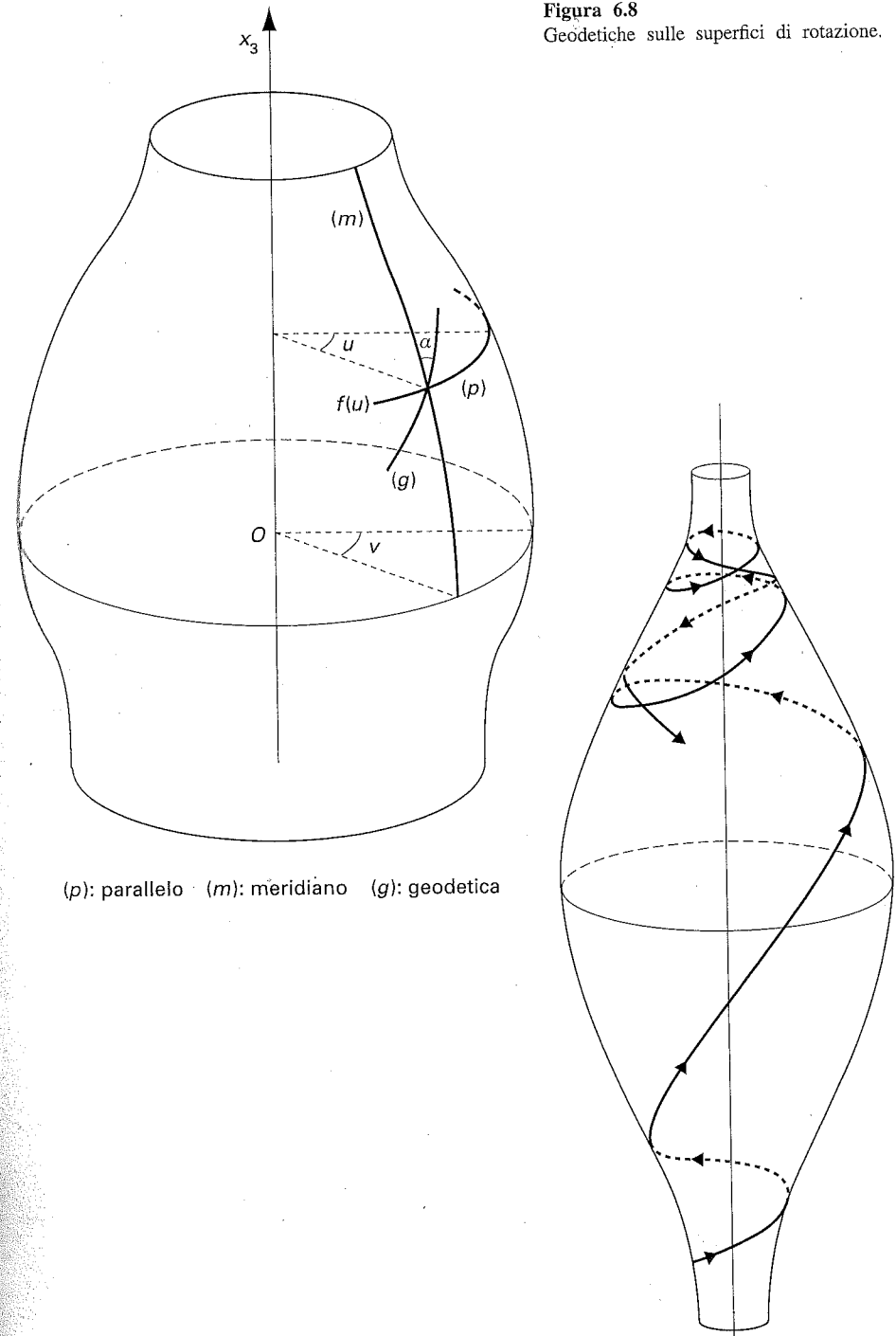


Figura 6.8  
Geodetiche sulle superfici di rotazione.

(p): parallelo (m): meridiano (g): geodetica