Lezione 13

09/11/2015 (introduciamo spelle)

Spiegare perchè x^2 è continua e $e^{\ln x^2}$ lo è!

Finire con i teoremi sulle funzioni continue definite in un compatto

- L'altra volta ho illustrato teorema degli zeri (richiamare i passi della dimostrazione)

- Teorema di Weierstrass (senza dimostrazione)
- Teorema valori intermedi

- Limiti notevoli e approssimazioni al primo ordine — creare problemi qualche esercizio

vedi lezione 11

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Esercizi da svolgere in classe

- Derivate (problemi che conducono al concetto di derivata)
- Rapporto incrementale e definizione di derivata

→ Esercizi sui limiti

Si ottengono molte
→ Conseguenze da questo limite:

Se prendo la derivata di ambo i membri

$$\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lg e = 1$$

cioè per $x\to\pm\infty$ $\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to 1 \Rightarrow x\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)\xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1$

Se pongo $\frac{1}{x} = y$ se $x\to\pm\infty$, $y\to 0^{\pm}$ e $\lim_{y\to 0}\frac{\lg(1+y)}{y} = 1$

∘) $\boxed{\lim_{y\to 0} \frac{\lg(1+y)}{y} = 1}$

si pongo $y = e^x - 1$ se $y \to 0$ anche $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+e^x-1)}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\lg e^x}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1} = 1$$

cioè $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1}$

∘∘) infine ponendo

$$y = (1+x)^\alpha - 1 \quad , \alpha \in \mathbb{R} \qquad \text{se } y \to 0 \text{ anche } x \to 0$$

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+(1+x)^\alpha - 1)}{(1+x)^\alpha - 1} = \lim_{x\to 0} \alpha \frac{\lg(1+x)}{(1+x)^\alpha - 1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\alpha x}{(1+x)^\alpha - 1} \frac{\lg(1+x)}{x} =$$

Poiché $\frac{\lg(1+x)}{x} \to 1$ se $x \to 0$

si trova $\lim_{x\to 0} \frac{\alpha x}{(1+x)^\alpha - 1} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

~~Poi se si dice che f(x) e g(x) son asintotiche (e si scrive)~~

$f(x) \sim g(x)$ se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Abbiamo quindi provato

$$\sin x \sim x \quad , \quad \lg(1+x) \sim x \quad , \quad e^x - 1 \sim x \quad , \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

si generalizzano considerando al posto di x un qualunque infinitesimo $\varepsilon(x)$

~~Le definizioni sono molto utili nel ca~~

Conoscere tali relazioni (più altre ...) è molto utile nel calcolo dei limiti

Se è dato $\frac{a_n b_n}{c_n}$ e $a_n \sim a'_n$, $b_n \sim b'_n$, $c_n \sim c'_n$ allora $\frac{a_n b_n}{c_n} \sim \frac{a'_n b'_n}{c'_n}$

(Lezione 13)

Gerarchia degli infiniti (da dimostrare later)

Consideriamo

$$(\log_a x)^\alpha, \quad x^\beta, \quad b^x, \quad \alpha > 0, \ \beta > 0, \ a, b > 1$$

Allora

$$\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} \dfrac{(\log_a x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \\[2ex] \lim_{x \to \infty} \dfrac{x^\beta}{b^x} = 0 \end{cases}$$

Esercizi sul calcolo dei limiti

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 1}{2x^2 - 3} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{5x^4 \left(1 + \frac{3}{5}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{x^4}\right)}{2x^2 \left(1 - \frac{3}{2x^2}\right)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 3x}{3x^3 + x + 1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 \left(1 - \frac{3}{2}\frac{1}{x}\right)}{3x^3 \left(1 + \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{3x^3}\right)} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{7x^4 - 3x^2}{8x^4} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{7\cancel{x^4}\left(1 - 3\frac{1}{x^2}\right)}{8\cancel{x^4}} = \frac{7}{8}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3 - 1}{2x^2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \frac{3x^{\cancel{3}}}{2\cancel{x^2}} \left(1 - \frac{1}{3x^3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3x^3 + x}{4x^4 + x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{x}(3x^2 + 1)}{x^{\cancel{2}}(4x^2 + 1)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{3x^3 + x}{4x^4 + x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} -\infty$$

la funzione $\frac{3x^3 + x}{4x^4 + x^2}$ è positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$

$$- \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \overset{(1^\infty)}{=} \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2} \cdot 2} = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2 = e^2$$

vedi limiti notevoli

$$- \lim_{x\to 0} \frac{\lg \sqrt{x+1}}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\lg (x+1)^{\frac{1}{2}}}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\lg (1+x)}{x} = \frac{1}{2}$$

$$- \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{1-e^{2x}} \overset{\frac{\infty}{-\infty}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^{2x}\left(\frac{1}{e^{2x}}-1\right)} = 0$$

$$- \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{2x+3}{2x}\right)^{1-x} \overset{(1^{\infty})}{=} \lim_{x\to -\infty} \left(1+\frac{3}{2x}\right)^{1-x} = \lim_{x\to -\infty} \left(1+\frac{3}{2x}\right) \lim_{x\to -\infty} \left(1+\frac{3}{2x}\right)^{-x}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \left(1+\frac{3}{2x}\right) \lim_{x\to -\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{2}{3}x}\right)^{\frac{2}{3}x}\right]^{-\frac{3}{2}} = 1 \cdot e^{-\frac{3}{2}}$$

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{2}{x-1}} = 1^{\infty} = \lim_{x\to 1} e^{\ln x^{\frac{2}{x-1}}} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{2}{x-1}\ln x}$$

$$= \left(\text{posto } x-1=t \text{ se } x\to 1 \Rightarrow t\to 0\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} e^{\frac{2}{t}\ln(1+t)} = e^{2\cdot 1} = e^{2}$$

$$\boxed{\text{limite notevole } \frac{\ln(1+t)}{t} \to 1}$$

$$- \lim_{x\to 0} x^{\lg x} = 0^{\infty} = \lim_{x\to 0} e^{\lg x^{\lg x}} = \lim_{x\to 0} e^{(\lg x)^{2}} \to +\infty$$

$$- \lim_{x\to +\infty} x \lg\left(1-\frac{1}{x}\right) = (\infty \cdot 0) = \lim_{x\to +\infty} \lg\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x} = \lg \lim_{x\to +\infty} \left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}$$

$$= \lg e^{-1} = -1$$

$$- \lim_{x\to 1^{+}} \frac{\lg\left(1+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x^{2}-1}} = \frac{0}{0}$$

NOTA $\sqrt{x-1}$ è infinitesimo per $x\to 1$

quindi: $\lg\left(1+\sqrt{x-1}\right) \sim \sqrt{x-1}$ per $x\to 1$ quindi

$$\lim_{x\to 1^{+}} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^{2}-1}} = \lim_{x\to 1^{+}} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+x)+\lg(1-x)}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\lg\left[(1+x)(1-x)\right]}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\lg(1-x^2)}{x^2}$$ $-x^2 = t$ se $x\to 0$ anche $t\to 0$

$$= \lim_{t\to 0}\left(-\frac{\lg(1+t)}{t}\right) = -1.$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{tg^2 x}{1-\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\frac{1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x\,(1+\cos x)}{\cos^2 x\,\cancel{(1-\cos^2 x)}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = 2$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\lg x}\right)^x = \left(1^\infty\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\lg x}\right)^{\lg x\cdot\frac{x}{\lg x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\lg x}\right)^{\lg x}\right]^{\frac{x}{\lg x}} \longrightarrow e^{+\infty} = +\infty$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1+e^x\right)^x = \left(1^\infty\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(1+e^x\right)^{x\frac{e^x}{e^x}} = \lim_{x\to-\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{e^x}}\right)^{\frac{1}{e^x}}\right]^{xe^x} = e^0 = 1$$

Poiché $\lim_{x\to-\infty} xe^x = (-\infty)\cdot 0 =$ (posto $x=-t$ se $x\to-\infty$ allora $t\to+\infty$)

quindi $\lim_{t\to+\infty} -t\,e^{-t} = \lim_{t\to+\infty} -\frac{t}{e^t} = 0$

~~$-\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt{x^2-1}}\right)^{(+\infty-\infty)} = \lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x}}\left(1-e^{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}}\right)$~~

~~[e poichè $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-x}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}} = +\infty$]~~

~~si trova che il limite proposto vale $+\infty$~~

$$-\lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt{x^2-1}} = (+\infty-\infty) = \lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x^2-1}}\left(e^{\sqrt{x}-\sqrt{x^2-1}}-1\right)$$

e poichè $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}-\sqrt{x^2-1} = \frac{x-x^2+1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^2-1}} = -\infty$

il limite proposto vale

$$+\infty(0-1) = -\infty$$

[dopo infinitesimi equivalenti]

Qualche esercizio sugli infinitesimi vedi Bramanti-Pagani-Salsa pagina 163

•) Dire se le seguenti funzioni f_i continue in ogni punto di $\mathbb{R}-\{0\}$ possono essere prolungate per continuità su $\mathbb{R}$ e, in caso affermativo determinare il prolungamento analitico

a) $f_1 = e^{-\frac{1}{x^2}}$

b) $f_2 = \frac{e^x-1}{x}$

a) $f_1(x)$ non è definita per $x=0$. Poichè $\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$

$$\bar{f}_1(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{per } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$$

b) $f_2(x)$ non è definita per $x=0$. Poichè $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

$$\bar{f}_2(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$$

Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ definita in $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{se } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x + b, & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x, & \text{se } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

sia continua in $\mathbb{R}$.

Basta che sia $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \overset{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{=} -1 \Rightarrow -a+b=-1$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \Rightarrow a+b=0$

quindi $\begin{cases} -a+b=-1 \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow a=-b \Rightarrow b=-\frac{1}{2},\ a=\frac{1}{2}$