Conviene inoltre osservare che due sistemi sono equivalenti, se uno d'essi si ottiene dall'altro aggiungendo più vettori che formino un sistema equilibrato; ciò infatti non altera nè il risultante, nè il momento risultante.

Un esempio semplicissimo di sistemi equilibrati si ha nei sistemi formati da *due vettori* applicati, opposti e aventi la medesima linea d'azione, ossia, come suol dirsi, ***direttamente opposti.***

Si ha senz'altro che, se un sistema di vettori applicati è equilibrato, è pur tale il sistema dei vettori direttamente opposti.

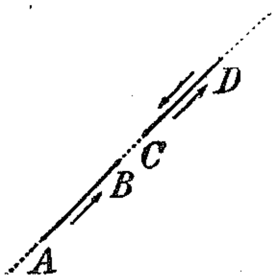
42. Operazioni elementari. — Dato un sistema di vettori applicati, chiameremo *operazioni elementari* le due seguenti:

1. *La composizione o decomposizione di vettori applicati in un medesimo punto,* ossia la sostituzione di quanti si vogliono vettori del sistema, applicati in un medesimo punto P, col loro risultante applicato nello stesso P; o, viceversa, la sostituzione di un generico vettore applicato in P con più altri, applicati nel medesimo punto, e aventi quel vettore per risultante.

2. *L'aggiunta o soppressione di due vettori direttamente opposti* (n. prec.).

Potremo considerare come operazione elementare anche il *trasporto di un vettore applicato lungo la sua linea d'azione,* ossia la sostituzione di un vettore applicato qualsiasi AB con un altro equipollente CD, situato sulla medesima retta.

Tale operazione consiste, infatti, nell'eseguire successivamente le due operazioni elementari seguenti: aggiungere al sistema che si considera i due vettori applicati (direttamente opposti) CD, DC; sopprimere dal sistema così ottenuto i vettori AB e DC.



Dal n. prec. e dal n. 40 sappiamo

Risulta di qui che, eseguendo successivamente sopra un sistema quante e quali si vogliano operazioni elementari, si ottiene sempre un sistema equivalente al dato.

Vedremo al n. 46 che reciprocamente, se due sistemi sono equivalenti, si può sempre da uno d'essi ottenere l'altro, eseguendo soltanto operazioni elementari.

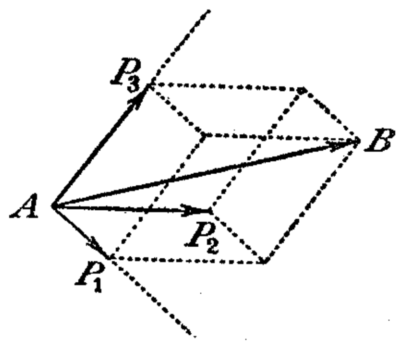
E' perciò che due *sistemi equivalenti* diconsi anche *riducibili l'uno all'altro.* Si tratta, bene inteso, di riducibilità con sole operazioni elementari.

Ne consegue che, come definizione dell'equivalenza fra due sistemi, si potrebbe anche assumere tale loro reciproca riducibilità, come appunto faceva il Poinsot (¹).

43. Riducibilità di ogni sistema di vettori applicati a tre vettori. — Siano P_1, P_2, P_3 tre punti dello spazio non situati in linea retta e consideriamo dapprima un solo vettore applicato AB, coll'origine A, non situata sul piano $P_1P_2P_3$.

Dal n. 14 sappiamo che il vettore AB si può decomporre in tre vettori concorrenti in A e aventi per linee d'azione le rette AP_1, AP_2, AP_3. Trasportiamoli lungo tali linee d'azione fino ad avere le origini rispettivamente in P_1, P_2, P_3. Il vettore AB è così ridotto (con sole operazioni) elementari a tre altri aventi le origini nei tre punti assegnati.

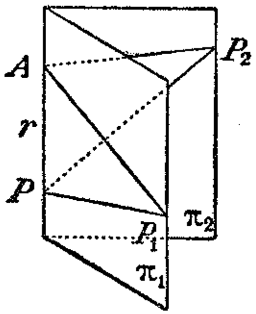
D'altra parte tale riduzione del vettore AB è sempre possibile, anche se l'origine A è situata nel piano $P_1P_2P_3$, senza che vi appartenga la linea d'azione, oppure se AB è tutto situato nel piano suddetto. Infatti, nella prima eventualità, basta spostare il vettore lungo la sua linea d'azione: l'origine A esce allora dal piano $P_1P_2P_3$, e si rientra nel caso



precedente. Se poi AB appartiene al piano $P_1P_2P_3$ delle tre rette AP_1, AP_2, AP_3, due almeno sono certamente distinte, p. es. AP_1, AP_2; il dato vettore si può allora decomporre (n. 14) in due (di cui uno eventualmente nullo) appartenenti a queste due rette, e quindi trasportabili in P_1, P_2; la riduzione è così effettuata, risultando di lunghezza nulla uno (o eventualmente anche due) dei tre vettori applicati in P_1, P_2, P_3.

Ciò posto, è facile vedere, più in generale, che ogni sistema di vettori applicati è riducibile a tre vettori coll'origine in tre punti quali si vogliano, non allineati. Basterà, evidentemente, eseguire l'accennata riduzione per tutti i vettori del sistema; e comporre poi i vettori che concorrono in ciascuno dei punti assegnati.

44. Riducibilità di ogni sistema di vettori applicati a due vettori. — Ci proponiamo più precisamente di dimostrare che ogni sistema di vettori applicati si può sempre ridurre (con sole operazioni elementari) a *due* vettori, uno dei quali coll'origine in un punto P, comunque prefissato.



Si prendano a tal fine due punti P_1 e P_2, non situati su di una stessa retta con P. Pel n. prec. il sistema dato è riducibile a tre vettori (eventualmente nulli) v, v_1, v_2, rispettivamente applicati in P, P_1, P_2. Indichiamo con π_1 il piano passante per P, che contiene il vettore v_1 (un piano qualsiasi passante per PP_1, se $v_1 = 0$) ed analogamente sia π_2 il piano che contiene P e v_2 (un piano qualsiasi per PP_2, se $v_2 = 0$).

Consideriamo dapprima il caso generale, in cui questi due piani sono distinti, e la loro retta d'intersezione r non contiene nè P_1, nè P_2.

Assunto allora su tale retta r un punto qualsiasi A distinto da P, si sa dai nn. 14, 40 che il vettore v_1 del piano π_1 è equivalente a due vettori coll'origine in P_1 e situati sulle rette PP_1 ed AP_1; questi si possono poi trasportare lungo le loro linee d'azione (n. 42) in modo da avere le origini in P ed A rispettivamente. Eseguendo la stessa riduzione sul vettore v_2, possiamo concludere che il dato sistema è riducibile a tre vettori coll'origine in P e a due coll'origine in A. Basta ora eseguire la composizione di tali vettori applicati in A ed in P, per ottenere la cercata riduzione a due soli vettori, uno dei quali coll'origine in P.

La stessa conclusione séguita a valere anche nei casi esclusi, in cui i piani π_1 e π_2 coincidono, ovvero la loro intersezione r passa per uno dei punti P_1 o P_2, ad es. P_1. Lo si riconosce prendendo A coincidente con P_1, e procedendo nel resto come sopra.

45. — Sia Σ un sistema equilibrato (n. 41) qualsiasi, ossia con risultante e momento risultante nulli.

Eseguendo su di esso la riduzione testè indicata, i due vettori, cui da ultimo si perviene, risultano di necessità direttamente opposti (in particolare nulli entrambi, se lo è uno di essi), perchè, anzitutto, per l'annullarsi del risultante, tali vettori devono essere opposti; e d'altra parte devono essere situati sulla medesima retta, in quanto, se così non fosse, non si annullerebbe il momento risultante, come si vede prendendo, ad es., per centro di riduzione un punto P, situato sulla linea di azione di uno di essi.

Ma ogni sistema composto di due vettori direttamente opposti si riduce, mediante la seconda operazione del n. 42, ad un vettore nullo; cosicchè si conclude che ogni sistema equilibrato è riducibile ad un *sistema assolutamente nullo*, cioè non comprendente alcun vettore, o ciò che è lo stesso, costituito soltanto da vettori nulli.

46. Riducibilità mutua di due sistemi equivalenti di vettori applicati. — Siamo ora in grado di dimostrare (cfr. n. 42) che *ogni sistema Σ_1 è riducibile a qualsiasi altro sistema equivalente Σ_2*.

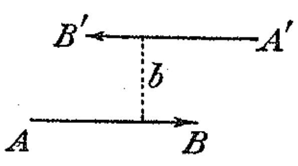
Consideriamo a tale scopo il sistema Σ_2' costituito dai vari vettori $(A, -v)$ direttamente opposti ai singoli vettori (A, v) di Σ_2, applicati negli stessi punti.

Aggiungendo al sistema Σ_1 tutti i vettori (A, v) del sistema Σ_2, e i corrispondenti $(A, -v)$ del sistema Σ_2', vediamo intanto che il sistema Σ_1 è riducibile al sistema composto dai tre $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_2'$. D'altra parte, qualunque sia il centro di riduzione, il sistema Σ_2' ha il risultante e il momento risultante manifestamente opposti al risultante e al momento di Σ_2, e quindi anche di Σ_1. Il sistema formato dai sistemi Σ_1, Σ_2' è dunque equilibrato, ossia, per quanto abbiamo veduto al n. prec., è riducibile ad un sistema assolutamente nullo. Ne consegue che il sistema formato da $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_2'$ è riducibile all'unico sistema Σ_2.

Si passa dunque successivamente (con sole operazioni elementari) da Σ_1 al sistema composto $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_2'$ e da questo a Σ_2.

47. Coppie. — Dicesi *coppia*, ogni sistema formato da due vettori applicati opposti (cioè paralleli e di verso opposto).

La distanza b delle rispettive linee d'azione dicesi *braccio della coppia*. Talora giova fare intervenire anche la nozione di ***verso di una coppia***, con che si intende il verso di rotazione, concordemente determinato dai due vettori nel loro piano, attorno ad un qualsiasi punto O, interno alla striscia limitata dalle linee d'azione dei vettori.



Siccome il risultante di una generica coppia Γ è nullo, così (n. 34), comunque vari il centro di riduzione, i momenti risultanti di una stessa coppia sono tutti equipollenti.

Siano AB e $A'B'$ i due vettori di Γ. Prendendo per centro di riduzione una delle due origini, ad es. il punto A', si vede tosto che il momento $\boldsymbol{M}$ della coppia Γ coincide col momento dell'altro vettore AB. Esso ha dunque ***lunghezza eguale al prodotto del braccio b della coppia per la lunghezza comune dei due vettori; è perpendicolare al piano della coppia; ed è destro*** (n. 27) ***rispetto ad*** AB.

Quest'ultima circostanza si riferisce al vettore $\boldsymbol{M}$ applicato in A'. Per ragione di continuità, si può evidentemente sostituire ad A', nel piano π della coppia, ogni altro punto, che sia situato dalla stessa banda di A' rispetto alla retta AB, in particolare un punto qualsiasi, interno alla striscia compresa fra le parallele AB, $A'B'$. Si può così caratterizzare il verso del momento $\boldsymbol{M}$, in modo simmetrico rispetto ai due

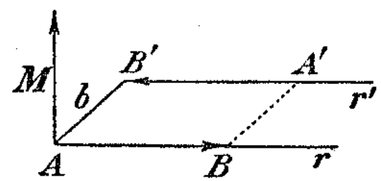
vettori, ricorrendo al verso della coppia da essi costituito, e si ha l'enunciato:

Per un osservatore coi piedi in un punto qualsiasi interno alla striscia compresa fra le due linee d'azione e il capo dalla banda del momento $\boldsymbol{M}$, *il verso della coppia apparisce destro.*

48. Dal fatto che il risultante di una coppia è sempre nullo, scende che due coppie sono equivalenti allora e solo allora che, per un centro di riduzione (e quindi per tutti), coincidono i loro momenti.

Ricordando poi (n. 41) che fra i sistemi a risultante nullo equivalgono a un vettore unico (nullo) soltanto quelli il cui momento è nullo, si ha facilmente che una coppia è equivalente ad un vettore nullo, se è nullo il suo momento (ossia se sono nulli i due vettori componenti, oppure se tali vettori giacciono sulla stessa retta); e che una coppia a momento non nullo non è mai equivalente ad un unico vettore.

49. Mostriamo che un vettore $\boldsymbol{M}$ si può sempre, e in infiniti modi, considerare come il momento di una qualche coppia Γ; è inutile specificare il polo, perchè (n. 47) il momento di una coppia non dipende dalla posizione del polo.



Per trovare una di queste coppie Γ, basta, per es., fissare un piano π perpendicolare al vettore $\boldsymbol{M}$ e tracciarvi ad arbitrio due rette parallele r, r'. Detta b la loro distanza, si costruisca una coppia Γ, applicando su r, r' due vettori opposti AB, $A'B'$, di lunghezza comune M/b e di senso tale che il verso di Γ apparisca destro rispetto al vettore $\boldsymbol{M}$, applicato in un punto interno alla striscia r, r'.

50. Riducibilità di ogni sistema di vettori applicati ad un vettore e ad una coppia. — Dall'osservazione ora fatta scende che un sistema qualsiasi di vettori applicati è sempre equivalente ad un altro costituito da un unico vettore e da un'unica coppia.

Infatti, preso per centro di riduzione un punto P qualsi-