Comunque sia, le equazioni del LAGRANGE, tenuto conto delle (48), si possono in tal caso scrivere

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial (T+U)}{\partial q_h} = 0:$$

ed, ove si osservi che, essendo la U indipendente dalle $\dot{q}$, si ha

$$\frac{\partial T}{\partial q_h} = \frac{\partial (T+U)}{\partial \dot{q}_h},$$

si conclude che, posto

$$T + U = \mathcal{L}(q, \dot{q} \mid t), \tag{49}$$

si può dare alle equazioni del LAGRANGE, subordinatamente, come si è detto, all'ipotesi che la sollecitazione sia conservativa, la forma più semplice:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{50}$$

In queste equazioni la funzione $\mathcal{L}$, cui si dà il nome di *funzione lagrangiana* o *potenziale cinetico*, è definita dalla (49), talchè, nei riguardi della sua dipendenza dagli argomenti $\dot{q}$, gode della particolarità di essere razionale intera di 2° grado.

41. SISTEMI LAGRANGIANI GENERALI. — Dal punto di vista analitico, la forma (50) delle equazioni del LAGRANGE suggerisce di considerare, come ovvia generalizzazione, i sistemi differenziali del tipo (50), nella ipotesi che la $\mathcal{L}$ denoti una funzione *qualsivoglia* degli argomenti q, $\dot{q}$ e t. Sono questi i sistemi che abitualmente si chiamano *sistemi lagrangiani generali*.

Si tratta ancora, manifestamente, di sistemi del 2° ordine nelle n funzioni incognite $q_i(t)$; ed è facile assegnare la condizione perchè un tal sistema sia *normale* (cioè risolubile rispetto alle n derivate seconde $\ddot{q}$). Invero, con un ragionamento analogo a quello svolto al n. 37 per le equazioni del LAGRANGE, si riconosce che nella generica equazione (50) le $\ddot{q}$ intervengono soltanto in modo lineare e, più precisamente, nella forma

$$\sum_{1}^{n}{}_k\, \ddot{q}_k \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k},$$

onde consegue che, come condizione necessaria e sufficiente per la accennata risolubilità del sistema (50), si richiede che non si annulli identicamente il determinante simmetrico

$$\Delta = \left\| \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \right\|,$$

cioè il cosiddetto *Hessiano* della funzione lagrangiana rispetto agli argomenti $\dot{q}$. Naturalmente, nel caso dinamico, codesto Hessiano in base alle (45), (49) si riduce al discriminante $\| a_{hk} \|$ della intera forza viva T o della sua parte quadratica T_2, secondo che i vincoli sono indipendenti o no dal tempo.

Osserviamo, in via di esempio, che il sistema (50) non è certamente normale, se la $\mathcal{L}$ è, rispetto alle $\dot{q}$, omogenea di 1° grado (anche non lineare). Infatti, in tal caso, si ha identicamente, pel teorema di EULERO,

$$\sum_{1}^{n}{}_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \mathcal{L}$$

e quindi, per derivazione rapporto ad una generica $\dot{q}_h$,

$$\sum_{1}^{n}{}_k \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n);$$

cosicchè, valendo queste n equazioni lineari per valori quali si vogliono delle $\dot{q}$ e, quindi, anche per valori non tutti nulli, si conclude che deve annullarsi il determinante dei coefficienti, cioè l'Hessiano della funzione $\mathcal{L}$. E questo risultato si può precisare ulteriormente, se si suppone che la $\mathcal{L}$, oltre che omogenea di 1° grado nelle $\dot{q}$, sia indipendente da t; giacchè in tal caso è facile riconoscere che le (50) non sono indipendenti, bensì sono legate dalla identità

$$\sum_{1}^{n}{}_h\, \dot{q}_h \mathcal{L}_h = 0,$$

dove per brevità si è denotato con $\mathcal{L}_h$ il binomio che compare a primo membro della h^{ma} (50). Invero, per l'ipotesi che $\mathcal{L}$ non contenga esplicitamente t, si ha

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{1}^{n}{}_k \left\{ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_h \right\}; \tag{51}$$