gnata una funzione $L(q, \dot{q}, t)$ soddisfacente la condizione[28]

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0 \, . \tag{6.49}$$

La dinamica è retta dalle equazioni di Lagrange, che riscriviamo:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \ , \quad j = 1, \ldots, n \, . \tag{6.50}$$

Nel caso della Meccanica dei sistemi di punti soggetti a vincoli olonomi e perfetti la funzione Lagrangiana è definita come $L = T - V$. A questi sistemi daremo il nome di *sistemi naturali.* D'altro canto possiamo ben considerare una funzione lagrangiana non degenere, anche non della forma naturale $L = T - V$; a questa è comunque associato il sistema delle equazioni differenziali di Lagrange, e quindi una dinamica, che non ha necessarimante un'interpretazione meccanica. Esempi di sistemi di questo tipo si hanno quando si tratta il calcolo delle variazioni.

Lemma 6.11: *I sistemi naturali soddisfano sempre la condizione (6.49).*

Dimostrazione. Grazie alla forma generale dell'energia cinetica stabilita dalla proposizione 6.8, si calcola subito

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} = g_{jk} \, .$$

Abbiamo già mostrato che questa matrice definisce una forma quadratica definita positiva, e quindi non può essere degenere. *Q.E.D.*

6.5.3 Proprietà di invarianza delle equazioni di Lagrange

Veniamo ora al problema di come cambiano le equazioni di Lagrange quando si effettua un cambio di carta locale, eventualmente anche dipendente dal tempo. In altre parole, supponiamo che sia assegnato un cambiamento locale di coordinate tramite n funzioni

$$q_1 = q_1(Q_1, \ldots, Q_n, t) \ , \ \ldots \ , \ q_n(Q_1, \ldots, Q_n, t) \ , \tag{6.51}$$

che si suppongono regolari (ad esempio di classe C^∞) ed invertibili. Da queste relazioni seguono anche le trasformazioni per le velocità generalizzate

$$\dot{q}_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial q_j}{\partial Q_k}\dot{Q}_k + \frac{\partial q_j}{\partial t} \ , \quad j = 1, \ldots, n \ , \tag{6.52}$$

---

[28] Si intende il determinante della matrice Hessiana i cui elementi sono le derivate seconde della funzione Lagrangiana rispetto alle velocità generalizzate. Si intende anche che la condizione debba valere per tutti i punti q e tutti i tempi t considerati. Come si vedrà più sotto, si tratta di una condizione di invertibilità che assicura la possibilità di riscrivere le equazioni di Lagrange risolte rispetto alla derivata di ordine massimo.

dove compare la matrice Jacobiana della trasformazione, che deve soddisfare

$$\det\left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_k}\right) \neq 0 \ , \tag{6.53}$$

in virtù dell'ipotesi di invertibilità. Il problema è come scrivere le equazioni della dinamica nelle nuove coordinate $Q_1, \ldots, Q_n$.

Il modo in cui sono state dedotte le equazioni di Lagrange lascia intuire che esse godano della proprietà di *invarianza in forma per trasformazioni di coordinate.* In effetti vale la

Proposizione 6.12: *Se si effettua un cambiamento di carta dalle vecchie coordinate $q_1, \ldots, q_n$ alle nuove coordinate $Q_1, \ldots, Q_n$ tramite un sistema di funzioni della forma (6.51) le equazioni di moto nelle nuove variabili assumono ancora la forma di equazioni di Lagrange*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_j} = 0 \ , \quad j = 1, \ldots, n \ ,$$

ove la nuova Lagrangiana $\tilde{L}(Q, \dot{Q}, t)$ è ricavata dalla vecchia $L(q, \dot{q}, t)$ per semplice sostituzione di variabili, ossia

$$\tilde{L}(Q, \dot{Q}, t) = L(q, \dot{q}, t)\big|_{q=q(Q,t),\, \dot{q}=\dot{q}(Q,\dot{Q},t)} \ .$$

Dimostrazione. Dalle (6.51) e (6.52), procedendo come per la dimostrazione del lemma 6.5, si ricavano le identità

$$\frac{\partial q_j}{\partial Q_k} = \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_k} \ , \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial q_j}{\partial Q_k} = \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_k} \ .$$

Per la nuova Lagrangiana $\tilde{L}(Q, \dot{Q}, t)$ si calcola poi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_k} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \ , \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_k} &= \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\frac{\partial q_j}{\partial Q_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial q_j}{\partial Q_k}\right)\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\frac{\partial q_j}{\partial Q_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_k}\right] \ , \\
\frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_k} &= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_k}\right] \ ,
\end{aligned}$$

ove si sottintende che tutte le funzioni devono essere riscritte in termini delle nuove coordinate e velocità Q, $\dot{Q}$, oltre che del tempo. Raccogliendo le tre espressioni precedenti e fattorizzando la matrice Jacobiana $\frac{\partial q_j}{\partial Q_k}$ si ottiene infine

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_k} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_k} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} .$$

Poichè la matrice $\frac{\partial q_j}{\partial Q_k}$ è non singolare, segue che il membro di sinistra si annulla per $k = 1, \ldots, n$ se e solo se si annullano tutti i termini $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}$ al secondo membro. Dunque le equazioni di Lagrange per $\tilde{L}$ sono soddisfatte se e solo se sono soddisfatte le equazioni di Lagrange per L. *Q.E.D.*

È interessante anche mettere in evidenza una proprietà di invarianza delle equazioni di Lagrange rispetto a modifiche delle funzione Lagrangiana.

Proposizione 6.13: *Sia $c \in \mathbb{R}$ non nullo, e sia $F(q,t)$ una funzione (regolare) arbitraria. Allora le equazioni di Lagrange per le funzioni*

$$cL(q, \dot{q}, t) \ , \quad L(q, \dot{q}, t) + \frac{dF}{dt}$$

coincidono con le equazioni per L.

Dimostrazione. Per $cL(q, \dot{q}, t)$ l'affermazione è evidente, perché la costante si fattorizza nelle equazioni di Lagrange. Per la seconda funzione basta mostrare che il contributo di $L_1 = \frac{dF}{dt}$ alle equazioni di Lagrange si annulla. A tal fine si osservi che

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t} ,$$

e dunque

$$\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial F}{\partial q_j} .$$

Si calcola allora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{dF}{dt} = \frac{\partial L_1}{\partial q_j} , \end{aligned}$$

ovvero

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L_1}{\partial q_j} = 0 .$$

Q.E.D.

La proposizione che abbiamo appena dimostrato mostra come Lagrangiane distinte possano generare la stessa dinamica.