tempo rispetto a quello iniziale; i piccoli moti invece per qualunque tempo; in entrambi i casi peró la condizione iniziale per $(\underline{q},\ \underline{\dot q})$ deve essere presa vicino a $(\underline{q}^0,\ \underline{0})$.

13.1 Integrali primi

Se esistono, sono le funzioni $f(\underline{q},\underline{\dot q},t)$ tali che $f(\underline{q},\underline{\dot q},t) = c$ costante su ogni soluzione delle equazioni di moto; in altre parole se si considerano due soluzioni distinte di queste, a ciascuna di esse puó corrispondere un valore di c diverso da quello dell'altro, ma sulla stessa soluzione essa si mantiene costante per ogni t. Vengono ora discussi alcuni esempi significativi:

1. Se $\underline{R}^{ea} + \underline{R}^{ev} = \underline{0}$, dalla $(10.12)_1$ segue $\underline{v}_G = \underline{c}$, cioé si ottengono tre integrali primi scalari, ovvero uno vettoriale. Esso prende il nome di *integrale vettoriale della quantitá di moto*;

2. Se esiste $\underline{u} \neq \underline{0}$ costante e inoltre $(\underline{R}^{ea} + \underline{R}^{ev}) \cdot \underline{u} = 0$, dalla $(10.12)_1$ si ricava $\underline{v}_G \cdot \underline{u} = c$ (*integrale scalare della quantitá di moto*);

3. Se O é un punto fisso e $\underline{M}_0^{ea} + \underline{M}_0^{ev} = \underline{0}$, dalla $(10.12)_2$ segue $\underline{K}_O = \underline{c}$ (*integrale vettoriale del momento delle quantitá di moto*);

4. Se esiste $\underline{u} \neq \underline{0}$ costante e inoltre $(\underline{M}_0^{ea} + \underline{M}_0^{ev}) \cdot \underline{u} = 0$ con O punto fisso, dalla $(10.12)_2$ segue $\underline{K}_O \cdot \underline{u} = c$ (*integrale scalare del momento delle quantitá di moto*);

5. Se T non dipende da q_r e inoltre $Q_r = 0$, la variabile q_r si dice **ciclica**; dalla $(10.12)_3$ segue $\frac{\partial T}{\partial \dot q_r} = c$;

6. Se dalle equazioni di moto se ne puó ricavare una in una sola incognita q del tipo

$$\ddot q = f(q) + g(q)\dot q^2\,, \tag{13.2}$$

allora esiste l'integrale primo

$$\frac{1}{2}A(q)\dot q^2 = E - V(q)\,, \tag{13.3}$$

con $A(q) > 0$ e E costante arbitraria. Infatti derivando rispetto al tempo la (13.3) si trova la (13.2) con $f(q) = -\frac{V'}{A}$ e $g(q) = -\frac{1}{2}\frac{A'}{A}$. Viceversa, da queste si ricavano $A = e^{-2\int g(q)dq}$,

$V = -\int A(q)f(q)dq$. Si noti che, se si vuole tracciare il grafico della funzione $V(q)$ non é necessario effettuare tali integrazioni in quanto $V' > 0 \iff f(q) < 0$.

13.2 Discussione di Weierstrass.

Discutiamo ora un metodo per studiare qualitativamente le soluzioni dell'equazione (13.2), usando l'integrale primo (13.3). Da questo si vede che $E - V(q) \geq 0$ e si ha $E - V(q) = 0 \iff \dot{q} = 0$. I valori di q per cui $E - V(q) = 0$ si chiamano *istanti d'arresto*. Questi, insieme ai simboli $+\infty$ e $-\infty$ possono essere ordinati in sequenza crescente, suddividendo cosí $\mathbb{R}$ nell'unione di intervalli aventi per estremi istanti d'arresto o i simboli $+\infty$ e $-\infty$. Se all'interno di uno di questi intervalli si ha $E - V(q) < 0$, quell'intervallo aperto si chiama *banda proibita*. Eliminando le bande proibite rimangono un insieme di intervalli ognuno dei quali é detto *banda permessa*; non é escluso che l'intervallo sia degenere, cioé costituito da un solo punto, un istante d'arresto. Una banda permessa contiene gli eventuali istanti d'arresto che ha per estremi, cioé é chiusa dalla stessa parte in cui é limitata.

Consideriamo prima il caso in cui si parte inizialmente da un punto $q(0)$ interno ad una banda permessa (ovviamente non si puó partire da un punto di una banda proibita); si avrá allora $E - V(q) > 0$ anche in un intorno di $q(0)$. Dalla (13.3) si ha allora $\dot{q} = \pm\sqrt{\frac{2}{A(q)}}\sqrt{E - V(q)}$ dove si deve scegliere il segno piú oppure il segno meno a seconda che sia $\dot{q} > 0$ o $\dot{q} < 0$ rispettivamente. Si consideri il caso $\dot{q} > 0$ (l'altro é simile). Risolvendo l'equazione differenziale a variabili separabili $\dot{q} = \pm\sqrt{\frac{2}{A(q)}}\sqrt{E - V(q)}$ si trova

$$t = \int_{q(0)}^{q(t)} \sqrt{\frac{A(q)}{2}} \frac{dq}{\sqrt{E - V(q)}}. \tag{13.4}$$

Perció qualunque posizione maggiore di $q(0)$ all'interno della stessa banda permessa, viene raggiunta in un tempo finito dato dalla (13.4). Se la banda permessa é illimitata a destra, tutte le posizioni vengono raggiunte in un tempo finito. Si dice, in tal caso, che il moto é senza istanti d'arresto; se q rappresenta un angolo, si dice anche che il moto é rivolutorio.

Se invece la banda permessa é limitata a destra da un istante d'arresto q_1, la (13.4) con q_1 al posto di $q(t)$ diventa integrale di una funzione generalmente continua. Il valore q_1 viene raggiunto? Per rispondere a tale domanda é necessario distinguere due sottocasi