1.20. Dalla figura risulta chiaro che, se $0 < x < \pi/2$ allora valgono le disuguaglianze

$$(10.9) \qquad 0 < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x.$$

Riportiamo una tabella con i valori delle funzioni trigonometriche per alcuni angoli di uso frequente. Il modo con cui ottenere tali valori è indicato negli esercizi.

x *radianti*	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$(3/2)\pi$	2π
x *gradi*	0	30	45	60	90	180	270	360
sen x	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
cos x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	0	1
tg x	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	*non definita*	0	*non definita*	0

11. Il principio di induzione

Abbiamo utilizzato nel paragrafo 9 la seguente affermazione sulla crescenza della funzione potenza x^n:

$$(11.1) \qquad 0 \le x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1^n < x_2^n, \qquad \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Vogliamo dimostrare questa proposizione per mezzo del principio di induzione. Supponiamo preliminarmente che essa valga per un certo indice n (ciò che dobbiamo provare è che la (11.1) sia vera per tutti gli n; qui stiamo supponendo che la (11.1) sia vera per qualche n; ad esempio, per n = 1 la (11.1) è banalmente vera!). Perciò supponiamo che valgano le disuguaglianze $0 \le x_1 < x_2$, $x_1^n < x_2^n$. Otteniamo:

$$(11.2) \qquad x_1^{n+1} = x_1\, x_1^n \le x_2\, x_1^n < x_2\, x_2^n = x_2^{n+1}.$$

Cioè abbiamo provato che, se vale la (11.1) per un certo indice n, allora essa vale anche per l'indice successivo n + 1. Ma allora la (11.1) vale sempre, perché: sappiamo che la proposizione vale per n = 1 (lo verifichiamo banalmente); per quanto sopra detto essa vale anche per l'indice successivo, cioè n = 2; ancora, sempre per lo stesso motivo la (11.1) vale per il successivo $n = 3$, e così via... Possiamo raggiungere con questo argomento qualsiasi naturale n.

Formuliamo in generale il seguente teorema la cui dimostrazione è riportata nel paragrafo 18 in appendice al capitolo 2.

PRINCIPIO DI INDUZIONE. — *Supponiamo che una proposizione dipendente da un indice* $n \in \mathbf{N}$ *sia vera per* $n = 1$ *e che inoltre, supposta vera per* n, *sia vera anche per il successivo* $n + 1$. *Allora la proposizione è vera per ogni* $n \in \mathbf{N}$.

Per chiarire meglio il principio consideriamo altri esempi. Dimostriamo per induzione la formula che esprime la somma dei primi n numeri naturali (questa formula era nota a Gauss dall'età di nove anni!):

$$1 + 2 + 3 + ... + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2} . \tag{11.3}$$

La formula è vera per $n = 1$; infatti si ha l'identità $1 = (1 \cdot 2)/2$. Supponiamo vera la (11.3) e dimostriamo la formula analoga con l'indice $n + 1$ al posto n. Per ottenere ciò, è naturale sommare ad entrambi i membri il numero $n + 1$:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + ... + n + (n + 1) &= \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) = \\ &= \frac{n(n + 1) + 2(n + 1)}{2} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} . \end{aligned} \tag{11.4}$$

Abbiamo ottenuto ciò che volevamo; quindi la (11.3) risulta vera per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Un'altra applicazione del principio di induzione è la seguente:

DISEGUAGLIANZA DI BERNOULLI. — *Per ogni numero reale* $x \geq -1$, *e per ogni naturale* n, *risulta*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \tag{11.5}$$

Dimostrazione: per $n = 1$ la proposizione è vera (con il segno =). Supponiamo vera la (11.5) per un numero naturale n; moltiplichiamo entrambi i membri per $1 + x$, che è una quantità maggiore o uguale a zero:

$$(11.6)\qquad \begin{aligned}(1 + x)^{n+1} &\geq (1 + nx)\,(1 + x) = \\ &= 1 + x + nx + nx^2 \geq 1 + (n + 1)\,x.\end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto la proposizione con $n + 1$ al posto di n. Perciò, in base al principio di induzione, la (11.5) è provata.

Utilizzando il principio di induzione, dimostriamo la formula che esprime la *somma di una progressione geometrica* di ragione $x \neq 1$:

$$(11.7)\qquad 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \qquad \forall\, x \neq 1.$$

Per $n = 1$, a secondo membro abbiamo

$$(11.8)\qquad \frac{1 - x^2}{1 - x} = \frac{(1 - x)\,(1 + x)}{1 - x} = 1 + x;$$

quindi la (11.7) è vera per $n = 1$. Supponendo verificata la (11.7), sommiamo ad entrambi i membri il termine x^{n+1}:

$$(11.9)\qquad \begin{aligned}1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^{n+1} &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = \\ &= \frac{1 - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}.\end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto la proposizione con $n + 1$ al posto di n. Quindi, in base al principio di induzione, la formula (11.7) è dimostrata.

Appendice al capitolo 1

12. Un primo esempio di approssimazione: l'algoritmo di Erone

Nel periodo dal 2000 al 600 a.C. i matematici della Mesopotamia ebbero un sistema di calcolo molto efficiente. In particolare conoscevano un algoritmo per il calcolo delle radici quadrate, che è oggi più noto con il nome del matematico Erone di Alessandria, vissuto tra il primo ed il secondo secolo d.C.

L'*algoritmo di Erone*, che è un caso particolare del metodo di Newton