Per una vasta categoria di sistemi materiali i vincoli (interni ed esterni) possono esprimersi analiticamente mediante equazioni e disequazioni (o, eventualmente, solo equazioni o sole disequazioni) in termini finiti, involgenti le coordinate dei punti del loro schema matematico o, comunque, i parametri che determinano la posizione del sistema. In tal caso i vincoli si dicono *olonomi* e i sistemi su cui agiscono *sistemi olonomi* o *soggetti a vincoli olonomi*. Se i dispositivi che vincolano un determinato corpo sono variabili, i vincoli (olonomi o non olonomi) sono dipendenti dal tempo e le equazioni e disequazioni che li esprimono dipendono esse stesse dal tempo.

Se i vincoli sono esprimibili analiticamente mediante sole uguaglianze essi si dicono *bilaterali*, se invece occorre qualche disuguaglianza *unilaterali*.

3. RAPPRESENTAZIONE ANALITICA DEI VINCOLI OLONOMI BILATERALI PER I VARI TIPI DI SISTEMI MATERIALI

Ci occuperemo in questo numero del modo di rappresentare analiticamente i vincoli olonomi cui possono essere soggetti i vari tipi di sistemi materiali, riferendoci solo al caso di vincoli bilaterali. Nello schema *punto materiale* non si può, naturalmente, né si deve tenere conto di vincoli interni. Gli eventuali vincoli olonomi presenti sono esterni e la loro rappresentazione analitica, nel caso bilaterale, consiste o in una sola equazione

$$f(x, y, z; t) = 0, \tag{3.1}$$

o in un sistema di due equazioni

$$f_1 (x, y, z; t) = 0, \quad f_2 (x, y, z; t) = 0, \tag{3.2}$$

che legano le coordinate del punto rispetto ad una prefissata terna di riferimento e – se i vincoli sono variabili – il tempo.

Il primo caso esprime (sullo schema fatto) la condizione di appartenenza del punto alla superficie (fissa o variabile) di equazione (3.1), il secondo alla curva rappresentata dalle (3.2) (che – nei casi concreti – hanno punti reali al finito).

Ad es., nel caso di un punto materiale soggetto al vincolo di appartenenza ad un piano, π, parallelo al piano xy e mobile con moto traslatorio uniforme con velocità τ parallela e concorde a z (Fig. 1), la (3.1) diviene

$$z = \tau t + z_0. \tag{3.3}$$

Nel caso di un punto, P vincolato a stare su una superficie la rappresentazione (3.1) porta generalmente a potere esprimere le coordinate in funzione di due parametri q_1, q_2 ed eventualmente del tempo.

Alla (3.1) si può cioè sostituire il gruppo di uguaglianze

$$x = x(q_1, q_2; t), \quad y = y(q_1, q_2; t), \quad z = z(q_1, q_2; t). \tag{3.4}$$

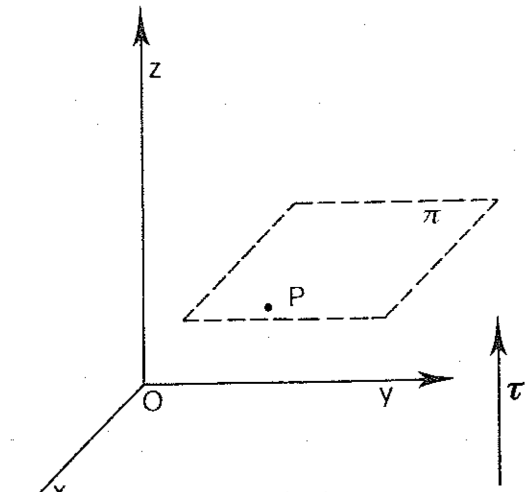

Fig. 1

Invece le (3.2) equivalgono a

$$x = x(q;\ t),\quad y = y(q;\ t),\quad z = z(q;\ t). \tag{3.5}$$

Nelle (3.4), (3.5) i parametri q_1, q_2, q possono assumere valori arbitrari.

Nel caso di un sistema, particellare o continuo, i vincoli olonomi bilaterali possono esprimersi mediante un certo numero di equazioni in termini finiti nelle coordinate dei vari punti del sistema, dipendenti dal tempo se i vincoli sono variabili. È chiaro che nel caso di un sistema continuo tali equazioni sono generalmente in numero illimitato ma vi sono dei casi di notevole interesse concreto in cui ci si può ridurre – con opportuni accorgimenti – a un numero finito di equazioni in un numero finito di parametri. Tale è, ad es., il sistema formato da un numero finito di corpi rigidi.

Nel caso di un unico corpo rigido le coordinate di un qualunque punto possono esprimersi mediante sei parametri, ξ_1, ξ_2, ... ξ_6 di cui i primi tre coincidono con le coordinate di un suo punto prefissato, gli altri con tre parametri atti a determinare l'orientamento di una terna solidale rispetto a una fissa. Ad es., si può ricorrere ai parametri q_i di cui al n. 2 del Cap. IV o agli angoli di Eulero (IV, n. 3), onde esprimere i coseni direttori degli assi della terna solidale fornite dalle (IV, 2.9) e (IV, 3.8). In tal modo si è già tenuto conto del vincolo di rigidità.

È ormai evidente che nel caso di un sistema particellare, come pure in quello di un sistema continuo costituito da un numero finito di corpi rigidi, i vincoli olonomi bilaterali sono rappresentabili mediante un numero finito ν di equazioni indipendenti in termini finiti in un certo numero di parametri ξ_1, ξ_2, ... ξ_r:

$$f_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r;\ t) = 0, \quad \ldots\ldots\ f_\nu(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r;\ t) = 0, \tag{3.6}$$

ove nelle f_1, ... f_r manca la dipendenza dal tempo se i vincoli sono fissi e si deve supporre $\nu < r$.

Ciò significa che il generico punto P del sistema ha le coordinate esprimibili mediante le uguaglianze

$$x = x(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r;\ t),\quad y = y(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r;\ t),\quad z = z(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r;\ t), \tag{3.7}$$

con le ξ_i soddisfacenti alle (3.6). Le (3.7) sono riassumibili nella relazione vettoriale

$$OP = OP(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r;\ t). \tag{3.8}$$

È bene osservare che la indipendenza delle equazioni (3.6) impone alla matrice jacobiana delle ν funzioni f_1, ... f_ν rispetto alle r variabili $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ di avere caratteristica ν. In termini più espliciti, nella matrice

$$(3.9) \qquad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \xi_2} & \ldots\ldots, & \dfrac{\partial f_1}{\partial \xi_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_\nu}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial f_\nu}{\partial \xi_2} & \ldots\ldots, & \dfrac{\partial f_\nu}{\partial \xi_r} \end{pmatrix}$$

almeno un determinante di ordine ν deve essere differente da zero per ogni valore di t. Se i vincoli consentono al sistema – come supporremo – infinite posizioni per le quali esso può passare con un movimento continuo, il numero ν, come si è già osservato, non può che essere minore di r e le (3.6) permettono, in generale, di esprimere i parametri $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ in funzione di $N = r - \nu$ parametri $q_1, q_2, \ldots, q_N$ indipendenti. In base a (3.8), il generico punto del sistema in tale caso è individuato dall'uguaglianza vettoriale

$$(3.10) \qquad OP = OP\,(q_1, q_2, \ldots q_N;\ t).$$

equivalente per ogni punto P alle tre uguaglianze scalari

$$(3.11) \qquad x = x(q_1, \ldots, q_N;\ t), \quad y = y(q_1, \ldots, q_N;\ t), \quad z = z(q_1, \ldots, q_N;\ t).$$

I parametri $q_1, q_2, \ldots q_N$ si chiamano *coordinate lagrangiane* o *libere* ed N *grado di libertà* del sistema. Ad es., nel caso del sistema costituito da due punti A, B vincolati a stare sugli assi x, y, mantenendosi a distanza invariabile ℓ, denotando con x_1, y_1, z_1 le coordinate di A e con x_2, y_2, z_2 quelle di B, esse soddisferanno alle equazioni

$$(3.12) \qquad \begin{cases} x_1^2 + y_2^2 - \ell^2 = 0, \\ y_1 = 0, \quad z_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad z_2 = 0. \end{cases}$$

Se si indica con q l'angolo di AB e dell'asse delle x (Fig. 2), si soddisfa al vincolo di rigidità espresso dalla (3.12,1) assumendo

$$(3.13) \qquad x_1 = -\ell \cos q, \quad y_2 = \ell \operatorname{sen} q.$$

In definitiva, il sistema formato dalle (3.12,2) e (3.13) costituisce la rappresentazione (3.11) del sistema mediante l'unico parametro lagrangiano q. Il sistema ha, evidentemente, un grado di libertà.

Lo schema punto materiale rientra come caso particolare in quello di sistema particellare. Si riconosce subito che il punto vincolato a stare su una superficie costituisce un sistema a due gradi di libertà, quello vincolato a stare su una curva ad un grado di libertà, mentre un punto libero ha tre gradi di libertà.