Lezione 13 (1) 4/11/2015

Finora abbiamo trattato il problema di un solo punto di massa m ~~soggetto a una forza cent~~ in un campo centrale, cioè il moto di un punto soggetto a una forza centrale

$$m\underline{a} = \frac{f(\rho)}{\rho}(P-O) \quad (\nabla), \quad O \text{ punto fisso}, \ \rho = |P-O|$$

Il caso che abbiamo dettagliatamente studiato è quello gravitazionale cioè quello in cui ~~la~~ forza centrale è del tipo $f(\rho) = -\frac{h}{\rho^2}$, $h>0$.

In tal caso abbiamo fatto sia uno studio qualitativo del moto ~~e~~ sia determinato l'equazione dell'orbita.

In particolare, nel caso generale ~~della~~ (cioè quello in cui il moto è piano) abbiamo introdotto la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{P}^2 + \int f(\rho)\, d\rho$$

che, nel caso in cui la forza sia quella di attrazione gravitazionale, si scrive come

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{P}^2 + \frac{h}{\rho}} \qquad (1)$$

Adottando coordinate polari (ρ,θ) nel piano del moto siamo quindi giunti alle seguenti equazioni di moto

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = 0 & 1a) \\ m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\theta}^2 = f(\rho) & 1b) \end{cases}$$

La prima rimarca la costanza della velocità areolare. Eliminando $\dot{\theta}$ dalla 1b) ~~tramite la~~ (sostituendo cioè $\dot{\theta} = \frac{2\dot{A}}{\rho^2}$ nella 1b)),

Abbiamo ottenuto un altro integrale primo ~~notevole~~

$$\frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 = E - \frac{2m\dot{A}^2}{\rho^2} + \int f(\rho)\, d\rho$$

che, nel caso ~~semplice~~ di forza newtoniana, diventa

$$\boxed{\frac{1}{2} m\dot{\rho}^2 = E - \frac{2m\dot{A}^2}{\rho^2} + \frac{h}{\rho}} \qquad (2)$$

La lezione di oggi ha il duplice scopo di illustrare il problema dei due corpi e mettere in evidenza il ~~ruolo~~ ruolo degli integrali primi, o meglio l'importanza di conoscere un numero sufficientemente "alto" di integrali primi. Iniziamo da quest'ultimo aspetto.

Infatti l'uso dell'integrale primo ⓔ ha consentito di studiare il moto da un punto di vista qualitativo, e con un po' di lavoro, partendo da e) abbiamo anche dedotto la equazione della traiettoria → nel caso di attrazione gravitazionale!

$$\rho = \frac{4m\dot{A}^2}{h}\left[\frac{1}{1+e\cos(\theta+\vartheta)}\right]$$

Abbiamo visto che si tratta di una conica e tenendo conto della relazione

$$E = \frac{h^2}{8m\dot{A}^2}\left(e^2-1\right)$$ abbiamo potuto studiare

in modo dettagliato il moto del punto P.
Vediamo che l'uso di un ulteriore integrale primo consente di arrivare all'equazione della traiettoria in modo estremamente rapido.

Osserviamo che nel caso di attrazione gravitazionale, in particolare abbiamo stabilito

NOTA: Introdurre il valore $h = GmM$ equivarrebbe a collocare la massa M nell'origine e in tutti i casi analizzati l'origine è occupata da uno dei fuochi della conica!!

vedi lezione 12

che nel caso di due pianeti (se l'orbita fosse una parabola o un'iperbole abbiamo scoperto che il corpo si allontana dall'origine e non è più osservabile!
(NON SONO COMETE COME DETTO ERRONEAMENTE l'altra volta)

valgono le tre leggi di Keplero

1) Il pianeta (cioè il punto di massa m) descrivono orbite ellittiche di cui il Sole (punto di massa M nell'origine) occupa uno dei fuochi
2) la velocità areolare è costante
3) Il rapporto $\frac{T^2}{a^3}$ fra quadrato del periodo di rivoluzione e cubo di un

semiasse è costante e non dipende dalla massa m del pianeta

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

nel caso di attrazione gravitazionale $f(\rho) = -\frac{h}{\rho^2}$

Iniziamo a mostrare come la presenza di un altro integrale primo consente di costruire l'equazione della traiettoria senza necessità di ricorrere ad alcuno strumento "avanzato" (derivate, eq. differenziali etc.)

e sappiamo che è un integrale primo

Proposizione Il vettore $\boxed{\underline{C} = +h\frac{(P-O)}{|P-O|} + \underline{K}_o \wedge \dot{P}}$ è un integrale primo del moto. Inoltre $\underline{C}$ appartiene al piano del moto.

(NOTA: h è la costante che appare in $f(\rho) = -\frac{h}{\rho^2}$, $\underline{K}_o$ è ~~il~~ momento della quantità di moto $\underline{K}_o = (P-O) \wedge m\dot{P}$

Dimostrazione Mostrare che $\underline{C}$ è un integrale primo equivale a mostrare che:

$$\frac{d}{dt}\left(+h\frac{(P-O)}{|P-O|} + \underline{K}_o \wedge \dot{P}\right) = \underline{0}$$

Calcoliamo preliminarmente la derivata $\frac{d}{dt}\left[\frac{(P-O)}{|P-O|}\right]$

~~Si ha~~

Tenendo conto che $|P-O| = \sqrt{(P-O)\cdot(P-O)}$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{(P-O)}{|P-O|}\right] = \frac{\dot{P}}{|P-O|} + (P-O)\frac{\dot{P}\cdot(P-O)}{\left(\sqrt{(P-O)\cdot(P-O)}\right)^3}$$

$$= \frac{\dot{P}}{|P-O|} - \frac{[\dot{P}\cdot(P-O)](P-O)}{|P-O|^3}$$

$$= \frac{(P-O)^2\dot{P} - (\dot{P}\cdot(P-O))(P-O)}{|P-O|^3}$$

$$= \frac{(P-O)}{|P-O|^3}\wedge(\dot{P}\wedge(P-O)) = -\frac{(P-O)}{|P-O|^3}\wedge((P-O)\wedge\dot{P})$$

$\underline{a}\wedge(\underline{b}\wedge\underline{c}) = (\underline{a}\cdot\underline{c})\underline{b} - (\underline{a}\cdot\underline{b})\underline{c}$

Teniamo conto della definizione del momento della quantità di moto $\underline{K}_o = (P-O)\wedge m\dot{P}$ e dell'eq. ① di pagina ①

(4) $$m\ddot{P} = \frac{f(\rho)}{\rho}(P-O) = -\frac{h}{\rho^3}(P-O) \quad \text{con } \rho = |P-O|$$

cioè $$\frac{P-O}{|P-O|^3} = -\frac{m\ddot{P}}{h}$$

Per cui $$\frac{d}{dt}\left[\frac{(P-O)}{|P-O|}\right] = -\frac{(P-O)}{|P-O|^3}\wedge\left[(P-O)\wedge\dot{P}\right] = \frac{m\ddot{P}}{h}\wedge\left[(P-O)\wedge\dot{P}\right]$$

$$= \frac{\ddot{P}}{h}\wedge\left[(P-O)\wedge m\dot{P}\right] = \frac{\ddot{P}}{h}\wedge \underline{K}_0$$

cioè $$\boxed{\frac{d}{dt}\left[\frac{(P-O)}{|P-O|}\right] = \frac{\ddot{P}}{h}\wedge\underline{K}_0} \qquad (\nabla\nabla)$$

come già osservato $$\frac{d}{dt}\underline{K}_0 = \frac{d}{dt}\left((P-O)\wedge m\dot{P}\right) = \underline{0}$$ perché il moto è centrale.

Quindi la $(\nabla\nabla)$ si può scrivere come
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{(P-O)}{|P-O|} - \frac{\dot{P}}{h}\wedge\underline{K}_0\right] = \underline{0}$$

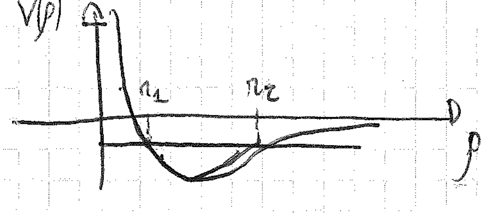
cioè il vettore $\underline{C} = h\frac{(P-O)}{|P-O|} + \underline{K}_0\wedge\dot{P}$ è un integrale primo.

Osserviamo anche che
$$\underline{C}\cdot\underline{K}_0 = \frac{h}{|P-O|}(P-O)\cdot\underline{K}_0 + (\underline{K}_0\wedge\dot{P})\cdot\underline{K}_0 = 0$$ per le proprietà dei prodotti misti.

Poiché $\underline{K}_0$ è un vettore costantemente ortogonale al piano del moto $\underline{C}$ appartiene a tale piano.

$\underline{C}$ vettore (integrale primo) di Runge-Lenz-Laplace. Determiniamo direzione verso e intensità di C

Osservazione dalla discussione di Weierstrass svolta nelle precedenti lezioni sappiamo che per energie negative (sempre nel caso di attrazione newtoniana) il moto è periodico e avviene in modo che il punto per $\dot{\rho} = 0$ transiti o per la posizione di massima distanza (r_2) o per quello di minima distanza (r_1) dall'origine (dove è collocato il punto) sole di massa M ($h = GmM$)) .



Se è $\dot\rho = 0$, poiché $P-O = \rho\,\underline{u}$ ($\underline{u}$ versore radiale)

$$\dot P = \dot\rho\,\underline{u} + \rho\dot\theta\,\underline{w} \qquad \underline{w} \text{ versore tangenziale}$$

quindi se $\dot\rho = 0 \Rightarrow \dot P = \rho\dot\theta\,\underline{w}$ cioè $\dot P$ è un vettore tangenziale!

Quindi $\underline{K}_o \wedge \dot P$ è un vettore puramente ~~tangenziale~~ radiale essendo

$$\underline{K}_o \wedge \dot P = \left[(P-O)\wedge m\dot P\right]\wedge \dot P = -\left[\underbrace{(P-O)\cdot \dot P}_{=0}\right] m\dot P + m\dot P^2 (P-O)$$

cioè $\underline{K}_o \wedge \dot P = m\dot P^2 (P-O)$ che ha la direzione di $\underline{u}$

$P-O$ e $\dot P$ sono ortogonali per quanto detto sopra

Quindi il vettore $\underline{C}$, nei punti di massima/minima distanza da O ha la direzione di $P-O$. Ma $\underline{C}$ è costante e quindi abbiamo determinato la direzione di tale vettore (che sarà quello di $P-O$ nei punti di massima/minima lontananza da O) !

massima → afelio, minima → perielio se si tratta di pianeti

Rimane da determinare il modulo di $\underline{C}$. ($\underline{K}_o = (P-O)\wedge m\dot P$ quindi $\underline{K}_o \perp \dot P$)

$$C^2 = h^2 + |\underline{K}_o|^2 |\dot P|^2 + \frac{2h}{|P-O|}(P-O)\cdot \underline{K}_o \wedge \dot P$$

Indichiamo con K il modulo del vettore K_o, si ha

$$C^2 = h^2 + K^2\dot P^2 + \frac{2h}{|P-O|}\underline{K}_o\cdot\left(\dot P\wedge(P-O)\right) = h^2 + K^2\dot P^2 + \frac{2h}{|P-O|}\underline{K}_o\cdot\left(\frac{-\underline{K}_o}{m}\right)$$

cioè $\boxed{C^2 = h^2 + K^2\dot P^2 - \frac{2h}{m|P-O|}K^2}$ eliminiamo da questa espressione $\dot P^2$

Poiché sussiste l'integrale dell'energia

$$\frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 = E + U = E + \frac{h}{\rho} \qquad \rho = |P-O|$$

$$\boxed{\dot{\rho}^2 = \frac{2}{m}\left(E + \frac{h}{\rho}\right)} \quad \text{⊙}$$

Quindi

$$\boxed{C^2 = h^2 + \frac{2}{m} k^2 \left(E + \frac{h}{\rho}\right) - \frac{2hk^2}{m|P-O|}} \quad \triangle$$

cioè $$\boxed{C^2 = h^2 + \frac{2}{m} k^2 E}$$

A questo punto conosciamo direzione, verso e modulo dell'integrale primo del nostro sistema.

È semplice ricostruire la ~~stata~~ traiettoria. Dalla definizione di

$$\underline{C} = h \frac{(P-O)}{|P-O|} + \underline{K}_o \wedge \dot{P}$$

si ricava $$\boxed{\underline{K}_o \wedge \dot{P} = \underline{C} - h \frac{(P-O)}{|P-O|}} \quad (*)$$

Consideriamo i quadrati dei moduli di ambo i membri dell'equazione (*)

$$\longrightarrow |\underline{K}_o \wedge \dot{P}|^2 = |\underline{K}_o|^2 \dot{P}^2 = K^2 \dot{\rho}^2 \underset{\text{usando ⊙}}{=} \frac{2}{m} K^2 \left(E + \frac{h}{\rho}\right)$$

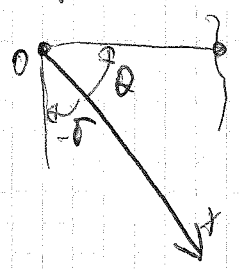
$$\rightarrow \left|\underline{C} - \frac{h(P-O)}{|P-O|}\right|^2 = C^2 + h^2 - \frac{2h}{|P-O|} \underline{C} \cdot (P-O) \underset{\text{usando }\triangle}{=} 2h^2 + \frac{2}{m} K^2 E - \frac{2h}{|P-O|} \underline{C} \cdot (P-O)$$

Eguagliando i risultati (cioè le espressioni dopo le frecciline)

$$\frac{2k^2}{m}\left(\cancel{E} + \frac{h}{|P-O|}\right) = 2h^2 + \frac{2}{m} \cancel{k^2 E} - \frac{2h}{|P-O|} \underline{C} \cdot (P-O)$$

$$\frac{k^2}{m} h \frac{1}{|P-O|} = h^2\left(1 - \frac{1}{h} \underline{C} \cdot \frac{(P-O)}{|P-O|}\right)$$

Tenuto conto che $\underline{C}$ e $(P-O)$ si trovano nel piano del moto potremmo indicare con θ l'angolo formato fra l'asse polare e $(P-O)$ e con $-\delta$ l'angolo formato fra l'asse polare e il vettore $\underline{C}$ (7)



Così si avrebbe

$$\underline{C} \cdot \frac{(P-O)}{|P-O|} = C \cos(\theta - \delta)$$

dove C è l'intensità (modulo) del vettore $\underline{C}$

Ecco che ~~ora~~ allora si perviene all'equazione della traiettoria

$$\frac{K^2}{m} h \frac{1}{|P-O|} = h^2 \left(1 - \frac{C}{h} \cos(\theta - \delta)\right)$$

posto $-\frac{C}{h} = e$ si trova $(\rho = |P-O|)$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{m}{K^2 h} \left(1 + e \cos(\theta - \delta)\right)$$

ovvero

$$\boxed{\rho = \frac{K^2 h}{m} \left(\frac{1}{1 + e \cos(\theta - \delta)}\right)}$$

analoga a quella già trovata per altra via!

Superintegrabilità del problema dei due corpi — aggiungere un paio di parole!

inoltre che: nota

$$\boxed{e^2 = \frac{C^2}{h^2} = 1 + \frac{2}{m} \left(\frac{K}{h}\right)^2 E}$$

cioè di nuovo $E \sim e^2 - 1$!!

Veniamo ora al problema dei due corpi.

Si tratta del problema di due punti P_1 di massa m_1 e P_2 di massa m_2 soggetti alle forze

$$\left(\underline{F} = \frac{f(\rho)}{\rho}(P_1 - P_2), P_1\right) \text{ e } (-\underline{F}, P_2)$$

con $\bar{\rho} = |P_1 - P_2|$.

In questo caso le equazioni di moto sono:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{P}_1 = \underline{F} \\ m_2 \ddot{P}_2 = -\underline{F} \end{cases}$$

Perché il moto dei pianeti può essere modellizzato in questo modo?

Si suppone siano date rispetto a un riferimento inerziale!!

Osservazione 1) Il sistema ha sei gradi di libertà

Osservazione 2) $m_1 \ddot{P}_1 + m_2 \ddot{P}_2 = \underline{0}$

Osservazione 3) Il sistema è soggetto (vedi Meccanica 1) a una sollecitazione conservativa e il potenziale sarà dato da: $U = \int f(\bar{\rho})\, d\bar{\rho}$

Nel caso in cui le forze siano di tipo attrattivo gravitazionale

$f(\rho) = -\frac{h}{\bar{\rho}^2}$ e quindi $\boxed{U = \frac{h}{\bar{\rho}}}$

Osservazione 4) Si indichi con G il baricentro del sistema. Per quanto visto a Meccanica 1 il ~~sistema~~ baricentro sarà interno al segmento $P_1 P_2$

Si ha $(m_1 + m_2)(G - O) = m_1 (P_1 - O) + m_2 (P_2 - O)$

Derivando due volte l'espressione di sopra

$$(m_1 + m_2)\ddot{G} = m_1 \ddot{P}_1 + m_2 \ddot{P}_2 \overset{\text{osservazione 2}}{=} \underline{0}$$

cioè il baricentro si muove di moto rettilineo ed uniforme

$$G = \underline{\alpha}\, t + \beta \ .$$

Questo suggerisce di provare ad esprimere l'energia cinetica del sistema in funzione di $\underline{G}$ e del vettore $P_1 - P_2$ (RICORDA il sistema ha sei gradi di libertà)

~~ricordando che~~

Abbiamo già espresso il potenziale in funzione del modulo di $P_1 - P_2$.

Poiché

$$G - O = \frac{m_1 (P_1 - O) + m_2 (P_2 - O)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 (P_1 - O) + m_2 (P_1 - O) - m_2 (P_1 - O) + m_2 (P_2 - O)}{m_1 + m_2}$$

cioè

$$\boxed{G - O = \frac{(m_1 + m_2)(P_1 - O) + m_2 (P_2 - P_1)}{m_1 + m_2}}$$

Questo può scriversi come

$$G - O = (P_1 - O) + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(P_2 - P_1) \Rightarrow \boxed{(P_1 - O) = G - O + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(P_1 - P_2)}$$

Procedendo allo stesso modo si trova

$$\boxed{P_2 - O = G - O - \frac{m_1}{m_1 + m_2}(P_1 - P_2)}$$

L'espressione dell'energia cinetica ~~si trasforma come segue~~ è

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{P}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{P}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{G} + \frac{m_2 (\dot{P}_1 - \dot{P}_2)}{m_1 + m_2}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{G} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\dot{P}_1 - \dot{P}_2)\right)^2$$

NOTA: i doppi prodotti si semplificano!

$$= \frac{1}{2} m_1 \dot{G}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2}(\dot{P}_1 - \dot{P}_2)^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{G}^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}(\dot{P}_1 - \dot{P}_2)^2$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{G}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 m_2 \cancel{(m_2 + m_1)}}{(m_1 + m_2)^2}\right)(\dot{P}_1 - \dot{P}_2)^2$$

cioè $\boxed{T = \frac{1}{2} M \dot{G}^2 + \frac{1}{2} \mu (\dot{P}_1 - \dot{P}_2)^2}$ $M = m_1 + m_2$ 10)

$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

A questo punto per semplificare i calcoli si è soliti supporre che $\dot{G} = 0$ cioè il baricentro sia in quiete.
Conviene assumere un riferimento con assi paralleli a quello inerziale e avente G come origine del sistema di riferimento inerziale rispetto al quale si vuole studiare il moto. (NOTA: le critiche a Newton per tali ipotesi)
Una prima conseguenza è che il sistema ammette ora ~~...~~ solo tre gradi di libertà.

~~Bisogna~~ Ad ogni modo

$$T = \frac{1}{2} \mu (\dot{P}_1 - \dot{P}_2)^2$$

e la lagrangiana associata al sistema sarà

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu (\dot{P}_1 - \dot{P}_2)^2 + \frac{h}{\rho}} \quad , \rho = |P_1 - P_2|$$

confrontando la lagrangiana così ottenuta [conviene porre $r = P_1 - P_2$ allora $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{h}{|r|}$]
con la lagrangiana 1) pagina 1
si vede chiaramente che essa è la lagrangiana che competerebbe ad un solo punto $\bar{P}$ ~~...~~ (~~fittizio~~ punto ovviamente "fittizio"!!) di massa μ posto a distanza $|r| = |P_1 - P_2|$ dall'origine G e soggetto alla ~~sola~~ sola forza centrale $F = \frac{f(\rho)}{\rho} (\bar{P} - G)$, $\rho = \bar{P} - G$.

Il problema può quindi essere studiato ~~alla~~ nello stesso modo descritto nelle precedenti lezioni!!
In particolare, dalle equazioni di moto si scoprirà che la velocità areolare è costante e anche che il moto è piano!!
Si dice che il problema, con una tale impostazione, è il ~~problema~~

~~ridotto~~ è stato ridotto a quello di un solo punto in un campo centrale. (Problema ristretto o ridotto dei due corpi).

Critica. Un tale approccio è comunque non soddisfacente in campo astronomico perché non si può identificare un sistema avente origine in un punto non materiale. Per questo si preferisce seguire l'approccio che sarà mostrato sotto.

Parziale difesa dalla critica. Se il baricentro è in quiete si muovono rispetto ad esso P_1 e P_2. Se però $m_2 \ll m_1$ (questo è il caso del sistema Sole-Terra*) allora il baricentro sarà vicinissimo al punto di massa m_1 ~~ed è dunque isolato piccolissimo~~. Si può allora supporre $P_1 \equiv G$ e il problema sopra evidenziato è, in prima approssimazione, trascurabile.

m_1 = Massa Sole $\simeq 1{,}98 \times 10^{30}$ Kg

m_2 = Massa terra $\simeq 5{,}97 \times 10^{24}$ Kg

Massa pianeta Giove $\simeq 1{,}89 \times 10^{27}$

è il pianeta con la massa maggiore!

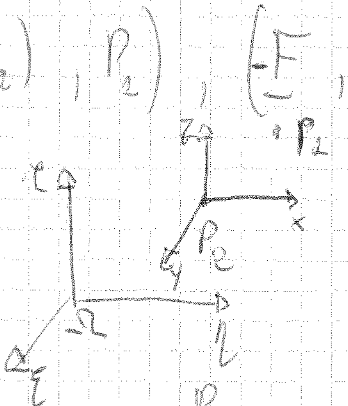
Un approccio certamente più soddisfacente per gli astronomi è il seguente:

Il sistema è sempre $\left(\underline{F} = \frac{f(\rho)}{\rho}(P_2 - P_1), P_1\right), \left(-\underline{F}, P_2\right)$

e le equazioni di moto

$$(1)\quad \begin{cases} m_1 \ddot{P}_1 = \underline{F} \\ m_2 \ddot{P}_2 = -\underline{F} \end{cases}$$

$\rho = |P_1 - P_2|$



Problema di moto relativo

Si prenda a considerare il riferimento con origine in P_2 e assi paralleli ed equiversi a quelli del riferimento inerziale rispetto a cui si intendono riferite le (1) (vedi figura).

Allora tale riferimento sarà ~~animato~~ animato di moto traslatorio non uniforme e quindi l'equazione del punto P_1 va modificata

(12)

tenendo conto anche delle forze di trascinamento. — quindi anche forze di Coriolis è nulla.

Detto meglio, per studiare il moto di P_1 rispetto a P_2xyz occorre tener conto che

in generale $\quad \underline{F}^{(t)} = -m\underline{a}^{(t)} = -m\underline{a}_{P_2} - m\left(\frac{d}{dt}(\underline{\omega}\wedge P-O)\right) \qquad m\underline{a}\,\underline{\omega}=\underline{0}$

quindi $\quad \underline{F}^{(t)} = -m_1\underline{a}_{P_2} = -m_1\ddot{P}_2 = m_1\frac{\underline{F}}{m_2}$

nel nostro caso

Perciò l'equazione di moto di P_1 nel riferimento scelto in questo modo sarà

accelerazione di P_1 nel riferimento P_2xyz

$$m_1\ddot{P}_1 = \underline{F} + \frac{m_1}{m_2}\underline{F} = \left(\frac{m_1+m_2}{m_2}\right)\underline{F}$$

ovvero $\ddot{P}_1 = \left(\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\right)\underline{F} = \frac{1}{\mu}\underline{F}$

in un riferimento non inerziale $\underline{F}+\underline{F}^{(t)}+\underline{F}^{(c)} = m\underline{a}^{(r)}$ quindi rispetto a P_2xyz essendo $\underline{\omega}=\underline{0}$ $\underline{F}+\underline{F}^{(t)} = m_1\ddot{P}_1$

In definitiva

$$\boxed{\ddot{P}_1 = \frac{1}{\mu}\underline{F}} \quad (\approx) \quad \ddot{P}_1 = \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\underline{F}$$

La $(\approx)$ assicura che si possono ripetere tutte le considerazioni svolte nel caso di un punto in un campo centrale ottenendo gli stessi risultati, eccetto che per la terza legge di Keplero (nel caso di forze gravitazionali). Infatti

$$\boxed{m_1\ddot{P}_1 = -Gm_1(m_1+m_2)\frac{(P_1-P_2)}{\rho^3}} \qquad \rho = |P_1-P_2|$$

quindi $\quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}$ ora dipende da m_1!

Però se $m_2 \gg m_1$ $\quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_2\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)} \simeq \frac{4\pi^2}{Gm_2}$

Infatti nel caso di forza gravitazionale si ha

$$m_1\ddot{P}_1 = m_1\left(\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\right)\frac{f(\rho)}{\rho^2}\frac{P_1-P_2}{\rho} =$$

$$= -\frac{m_1(m_1+m_2)}{m_1 m_2}\frac{G m_1 m_2}{\rho^3}(P_1-P_2) = -Gm_1(m_1+m_2)\frac{P_1-P_2}{\rho^3}$$

$$= -Gm_1(m_1+m_1)\frac{(P_1-P_2)}{\rho^3}$$

Cenni sul problema dei tre corpi (vedi dispense Cornelis)

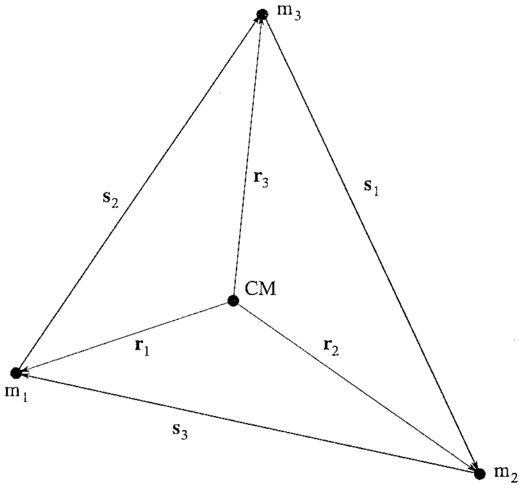


Figura VIII.2: Vettori posizione $\boldsymbol{s}_1 = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3$, $\boldsymbol{s}_2 = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{s}_3 = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ per il problema dei tre corpi.

Essendo ϑ l'angolo tra $\boldsymbol{r}$ e la direzione fissa di $\boldsymbol{A}$, risulta:[2]

$$\|\boldsymbol{A}\| r \cos\vartheta = \|\boldsymbol{L}\|^2 - G\mu^2 M r,$$

oppure:

$$\frac{1}{r} = \frac{G\mu^2 M}{\|\boldsymbol{L}\|^2} \left\{ 1 + \frac{\|\boldsymbol{A}\|}{G\mu^2 M} \cos\vartheta \right\}.$$

Dunque abbiamo ricavato la prima legge di Keplero, se il modulo di $\boldsymbol{A}$ è strettamente inferiore di $G\mu^2 M$. In tal caso $\varepsilon = [\|\boldsymbol{A}\|/G\mu^2 M]$ è l'eccentricità ε (e quindi $\boldsymbol{A} = \vec{0}$ se e solo se l'orbita del pianeta è una circonferenza) e il vettore di Laplace-Runge-Lenz è diretto dal Sole verso il perielio dell'ellisse (cioè, $\vartheta = 0$). Infine, il modulo del vettore di Laplace-Runge-Lenz è dato da:

$$\|\boldsymbol{A}\| = G\mu^2 M \varepsilon.$$

5 Problema dei Tre Corpi

Il problema di Keplero dei tre corpi riguarda la risoluzione delle equazioni di moti di un sistema di tre masse, m_1 in posizione $\boldsymbol{r}_1$, m_2 in posizione $\boldsymbol{r}_2$ e m_3 in posizione $\boldsymbol{r}_3$ (con tutte le posizioni relative al centro di massa), che interagiscono

[2]Il modulo del vettore di Laplace-Runge-Lenz viene scritto come $\|\boldsymbol{A}\|$, per non confonderlo con l'area che figura nella discussione della velocità areale.

tramite la forza gravitazionale tra ogni coppia di particelle. Le equazioni del moto sono le seguenti:

$$\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{r}}_1 &= -Gm_2\frac{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|^3} - Gm_3\frac{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3|^3} = -Gm_2\frac{\boldsymbol{s}_3}{|\boldsymbol{s}_3|^3} + Gm_3\frac{\boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_2|^3},\\
\ddot{\boldsymbol{r}}_2 &= -Gm_1\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|^3} - Gm_3\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3|^3} = -Gm_3\frac{\boldsymbol{s}_1}{|\boldsymbol{s}_1|^3} + Gm_1\frac{\boldsymbol{s}_3}{|\boldsymbol{s}_3|^3},\\
\ddot{\boldsymbol{r}}_3 &= -Gm_1\frac{\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1|^3} - Gm_2\frac{\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2|^3} = -Gm_1\frac{\boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_2|^3} + Gm_2\frac{\boldsymbol{s}_1}{|\boldsymbol{s}_1|^3},
\end{aligned}$$

essendo

$$\boldsymbol{s}_1 = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3, \qquad \boldsymbol{s}_2 = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1, \qquad \boldsymbol{s}_3 = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2.$$

In tal caso si ottengono le tre equazioni di moto

$$\ddot{\boldsymbol{s}}_i = -mG\frac{\boldsymbol{s}_i}{|\boldsymbol{s}_i|^3} + m_i\boldsymbol{G}, \qquad i = 1,2,3, \tag{VIII.9}$$

dove

$$m = m_1 + m_2 + m_3, \qquad \boldsymbol{G} = G\left(\frac{\boldsymbol{s}_1}{|\boldsymbol{s}_1|^3} + \frac{\boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_2|^3} + \frac{\boldsymbol{s}_3}{|\boldsymbol{s}_3|^3}\right).$$

Dalle tre equazioni accoppiate (VIII.9) non si conosce la soluzione generale, ma soltanto quella che si ottiene in alcuni casi abbastanza elementari. Si osservi che le tre equazioni (VIII.9) sono accoppiate, poichè

$$\boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2 + \boldsymbol{s}_3 = \vec{0}. \tag{VIII.10}$$

Nel caso in cui $\boldsymbol{G} = \vec{0}$, le equazioni di moto (VIII.9) si disaccoppiano e la (VIII.9) si riduce alla stessa forma del problema di Keplero dei due corpi:

$$\ddot{\boldsymbol{s}}_i = -mG\frac{\boldsymbol{s}_i}{|\boldsymbol{s}_i|^3}, \qquad i = 1,2,3,$$

con ciascuna delle masse che si muove lungo un'orbita ellittica che giace sullo stesso piano con lo stesso punto focale e lo stesso periodo. Il disaccoppiamento si verifica quando le masse si trovano ai vertici di un triangolo equilatero.[3] Man mano che il moto procede, le equazioni rimangono disaccoppiate e quindi la condizione del triangolo equilatero rimane valida anche se il triangolo cambia orientazione e grandezza. In astronomia una tale situazione consiste nei cosidetti troiani, asteroidi che condividono la stessa orbita di un pianeta maggiore ma costituiscono un triangolo equilatero con il pianeta maggiore ed il Sole. Sono

[3] Le equazioni (VIII.10) e $\boldsymbol{G} = \vec{0}$ valgono simultaneamente se e solo se le tre masse si trovano nei vertici di un triangolo equilatero.

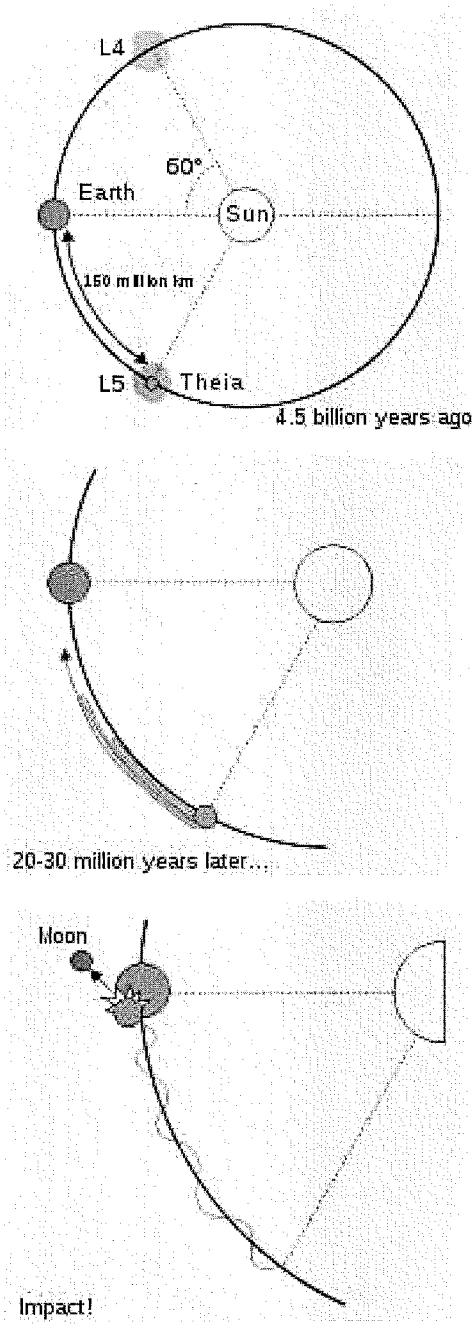


Figura VIII.3: L'ipotetica formazione della Luna. Vedi Wikipedia.

stati infatti trovati asteroidi troiani per Giove, Marte e Nettuno, e, di recente, per la Terra. Secondo una teoria (da comprovare) la Luna è nata dalla collisione della Terra con un pianeta ipotetico (chiamato Theia oppure Orpheus) che prima formava un triangolo equilatero con la Terra ed il Sole e poi è stato disturbato gravitazionalmente (vedi Wikipedia, Formazione della Luna).

Un altro caso particolare che si può trattare abbastanza bene, è il caso in cui le due masse m_1 e m_2 sono molto grandi e si muovono l'una rispetto all'altra di un moto confinato, mentre la terza, m_3, molto più piccola, si limita a perturbare il moto delle altre due. In tal caso la terza massa si muove nel campo gravitazionale generato delle prime due masse. Un esempio è il moto di una navicella spaziale in orbita tra la Terra e la Luna.