95

MOTO DI UN PUNTO VINCOLATO AD UNA CURVA LISCIA E FISSA

Siano $P = P(\lambda)$ le equazioni parametriche della curva. Le equazioni (~~11~~) (10.11) di pag. ~~76~~ degli appunti di Meccanica 1 per questo caso sono

$$\begin{cases} m\ddot{P} = \vec{F}^a + \vec{F}^v \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} - \frac{\partial T}{\partial \lambda} = Q_\lambda = \vec{F}^a \cdot \frac{\partial P}{\partial \lambda} \quad \text{con}\, T = \frac{1}{2}m\left[P'(\lambda)\right]^2 \dot{\lambda}^2 \end{cases}$$

la seconda delle quali ci dà $\lambda = \lambda(t)$ e, dopo ciò, la 1^a ci dà $\vec{F}^v$.
Se $\lambda = s$, ascissa curvilinea, le suddette equazioni divengono

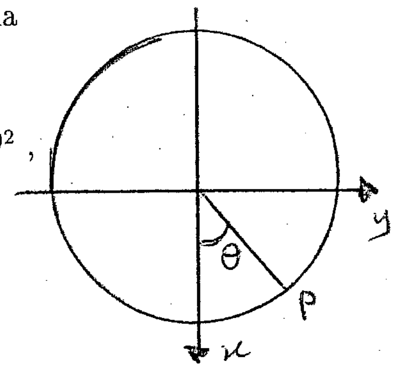
$$\begin{cases} m\ddot{s}\vec{t} + m\frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n} = \vec{F}^a + \vec{F}^v \\ m\ddot{s} = F^a_t = \vec{F}^a \cdot \vec{t} \quad \text{giacchè} \quad |P'(s)| = 1 \,. \end{cases}$$

La seconda di queste è un' equazione pura da cui ricavare $s = s(t)$; la prima, proiettata nel triedro intrinseco, ci dice grazie anche alla seconda, che

$$F^v_t = 0\,, \quad F^v_n = m\frac{\dot{s}^2}{\rho} - F^a_n\,, \quad F^v_b = -F^a_b\,.$$

IL PENDOLO SEMPLICE

Si tratta di un punto P di massa m vincolato ad una circonferenza verticale liscia e fissa soggetto ad una sola forza attiva, la forza peso $m\vec{g}$. Preso come parametro lagrangiano l' angolo ϑ che $P - O$, essendo O il centro della circonferenza, forma con la verticale discendente, si ha



$$P \equiv (l\cos\vartheta, l\sin\vartheta, 0)$$

con l raggio della circonferenza. Ne segue $T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}^2$,
$Q_\vartheta = m\vec{g} \cdot \frac{\partial P}{\partial \vartheta} = -mgl\sin\vartheta$.
Le equazioni della sezione precedente diventano

$$\begin{cases} m\frac{\partial P}{\partial \vartheta}\ddot{\vartheta} + m\frac{\partial^2 P}{\partial \vartheta^2}\dot{\vartheta}^2 = m\vec{g}^a + \vec{F}^v \\ ml^2\ddot{\vartheta} = -mgl\sin\vartheta\,. \end{cases}$$

Poichè $\frac{\partial^2 P}{\partial \vartheta^2} = -(P - O)$, la prima di queste moltiplicata scalarmente per $\frac{\partial P}{\partial \vartheta}$, $(P - O)$, e $\vec{k}$ dà

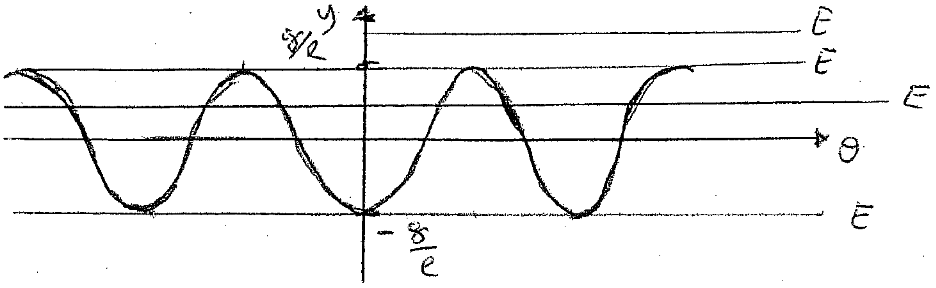
$$\vec{F}^v \cdot \frac{\partial P}{\partial \vartheta} = 0\,, \quad \vec{F}^v \cdot (P - O) = -ml^2\dot{\vartheta}^2 - mgl\cos\vartheta\,, \quad F^v_k = 0\,.$$

Dall' altra equazione ricavo

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l}\sin\vartheta \quad , \quad \text{equazione del pendolo semplice.}$$

Le configurazioni di equilibrio si ricavano da $\sin\vartheta = 0$, cioè $\vartheta = 0, \pi$. La suddetta equazione consente una discussione di Weierstrass in quanto ha l' integrale primo dell' energia

$$\frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 = E - V(\vartheta) \quad \text{con} \quad V(\vartheta) = -\frac{g}{l}\cos\vartheta$$



Se $E > \frac{g}{l} \Rightarrow$ il moto è rivolutorio,
se $E = \frac{g}{l}$, $\vartheta(0) = \pi \Rightarrow$ si ha la quiete $\vartheta(t) = \pi$,
se $E = \frac{g}{l}$, $\vartheta(0) \neq \pi \Rightarrow$ il moto è asintotico verso π,
se $-\frac{g}{l} < E < \frac{g}{l} \Rightarrow$ il moto è oscillatorio periodico,
se $E = -\frac{g}{l}$, $\Rightarrow$ si ha la quiete $\vartheta(t) = 0$.
Notiamo che se il punto viene posto in $\vartheta = \pi$ con velocità nulla, allora vi rimane; se invece lo mettiamo lì vicino con velocità piccola, esso se ne allontana di una quantità finita. Si dice in questo caso che $\vartheta = \pi$ è posizione di equilibrio instabile.
Invece $\vartheta = 0$ è posizione di equilibrio stabile in quanto, mettendo il punto lì vicino con velocità piccola, rimane lì vicino con velocità piccola.
Si noti anche che il potenziale è $U = m\vec{g} \cdot (P - O) = mgl\cos\vartheta$ ed ha un massimo proprio in $\vartheta = 0$ ed un minimo in $\vartheta = \pi$. La stabilità poteva essere studiata anche in questo modo, come vedremo in seguito.
Si noti infine che l' equazione di moto poteva essere ottenuta anche facendo la derivata dell' integrale dell' energia rispetto al tempo, e semplificando $\dot{\vartheta}$.

Moti in prima approssimazione.

L' equazione $\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l}\sin\vartheta$ può essere linearizzata in un intorno di $\vartheta = \pi$ e diviene

$$\ddot{\vartheta} = \frac{g}{l}(\vartheta - \pi), \quad \text{da cui} \quad \vartheta - \pi = c_1 e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t},$$