	c	c_1	...	c_6	c_7	c_8	c_9
$x^3 + x - 1 = 0$	0.5	0.75	...	0.6796	0.6835	0.6816	0.6826
$e^x + x = 0$	– 0.5	– 0.75	...	– 0.5703	– 0.5664	– 0.5683	– 0.5673

Quindi la radice dell'equazione $x^3 + x - 1 = 0$ è $x_0 = 0.682$ ($\pm$ 0.001); la radice dell'equazione $e^x + x = 0$ è $x_0 = -0.567(\pm 0.001)$. Il numero $\pm$ 0.001 è una stima dell'errore; cioè ad esempio nel primo caso risulta $0.681 < x_0 < 0.683$.

Chiudiamo il paragrafo con un'osservazione sull'assioma di completezza (2.11). Abbiamo utilizzato tale assioma nella dimostrazione del teorema dell'esistenza degli zeri, in particolare nell'affermazione che la successione a_n, essendo monotòna e limitata, risulta convergente.

Ciò è essenziale; infatti, nell'ambito dei numeri razionali **Q**, dove non è verificato l'assioma di completezza, non vale nemmeno il teorema dell'esistenza degli zeri. Ad esempio, l'equazione $f(x) = x^2 - 2 = 0$ non ha soluzioni nell'intervallo di razionali $\{x \in \mathbf{Q}: 0 \le x \le 2\}$, nonostante che $f(0) < 0$, $f(2) > 0$. Infatti si è già verificato nel paragrafo 5 che $\sqrt{2}$ non è razionale. L'assioma di completezza è essenziale anche in altri teoremi di esistenza; ad esempio nel teorema di Weierstrass, o, come già detto, nel teorema sull'esistenza del limite per le successioni monotòne.

60. Il teorema sulle successioni monotòne

Nel presente paragrafo dimostriamo il seguente teorema, enunciato nel paragrafo 48:

TEOREMA SULLE SUCCESSIONI MONOTÒNE. — *Ogni successione monotóna ammette limite. In particolare ogni successione monotóna e limitata è convergente.*

Dimostrazione: consideriamo il caso di una successione a_n crescente e limitata. Posto $\ell = \sup_n a_n$, fissato $\varepsilon > 0$, per le proprietà dell'estremo superiore (paragrafo 15) esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che

$$\ell - \varepsilon < a_\nu . \tag{60.1}$$

Per $n > \nu$ risulta $a_\nu \le a_n$ e dunque

$$\ell - \varepsilon < a_\nu \le a_n \le \ell < \ell + \varepsilon, \tag{60.2}$$

da cui $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$.

Consideriamo ora il caso di una successione a_n crescente e non limitata (superiormente). Fissato $M > 0$ esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che $a_\nu > M$. Dato che a_n è crescente, per ogni $n > \nu$ risulta

$$a_n \ge a_\nu > M \tag{60.3}$$

da cui $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

In modo analogo si trattano i casi relativi a successioni decrescenti.

Ricordando che una successione si dice *regolare* se essa ammette limite (finito o infinito), il precedente teorema afferma che *ogni successione monotóna è regolare.*

61. Successioni estratte. Il teorema di Bolzano-Weierstrass

Sia a_n una successione di numeri reali e sia n_k una successione strettamente crescente di numeri naturali. La successione a_{n_k} definita da

$$k \in \mathbf{N} \to a_{n_k} \tag{61.1}$$

prende il nome di *successione estratta* da a_n, di indici n_k.

Ad esempio, se $n_k = 2k$, la successione estratta da a_n di indici $2k$, cioè di indici pari, è

$$a_2, a_4, \dots, a_{2k}, \dots \tag{61.2}$$

Se invece $n_k = 2k - 1$, si ottiene l'estratta da a_n di indici dispari:

$$a_1, a_3, \dots, a_{2k-1}, \dots \tag{61.3}$$

È facile verificare che, per ogni successione n_k strettamente crescente di numeri naturali, si ha

$$n_k \ge k, \qquad \forall k \in \mathbf{N}. \tag{61.4}$$

Infatti, per $k = 1$, si ha ovviamente $n_1 \ge 1$. Inoltre, supponendo valida la (61.4), proviamo che risulta $n_{k+1} \ge k + 1$, da cui, per il principio di induzione, la (61.4) risulterà vera per ogni k. Per ipotesi è $n_{k+1} > n_k \ge k$, ovvero $n_{k+1} > k$ e perciò $n_{k+1} \ge k + 1$.

Dalla (61.4) si ricava facilmente la seguente

PROPOSIZIONE. — *Se* a_n *converge verso* a, *allora ogni estratta* a_{n_k} *converge verso* a.

Dimostrazione: fissato $\varepsilon > 0$ esiste k_0 tale che $|a_n - a| < \varepsilon$ per ogni $n > k_0$. Se $k > k_0$, essendo $n_k \ge k$, si ha anche $n_k > k_0$ e perciò $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$.