Metodi di regolarizzazione in spazi di Banach e applicazioni alla ricostruzione di immagini

Corso di Metodi Numerici in Informatica

Emanuele Frandi
In collaborazione con Claudio Estatico
Università degli Studi dell'Insubria

Seminario – 11 maggio 2011

Introduzione

Scopo: risolvere il problema inverso (mal posto)

$$Fx = y,$$

dove y è il dato a disposizione (esempio: un'immagine sfuocata) e x è la soluzione da ricostruire.

Introduzione

Scopo: risolvere il problema inverso (mal posto)

$$Fx = y,$$

dove y è il dato a disposizione (esempio: un'immagine sfuocata) e x è la soluzione da ricostruire.

- Caso classico: $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ è un operatore tra spazi di Hilbert.

Introduzione

Scopo: risolvere il problema inverso (mal posto)

$$Fx = y,$$

dove y è il dato a disposizione (esempio: un'immagine sfuocata) e x è la soluzione da ricostruire.

- Caso classico: $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ è un operatore tra spazi di Hilbert.
- Si può generalizzare al caso di un'equazione tra spazi di Banach? Ci sono motivi per farlo?

Introduzione

Scopo: risolvere il problema inverso (mal posto)

$$Fx = y,$$

dove y è il dato a disposizione (esempio: un'immagine sfuocata) e x è la soluzione da ricostruire.

- Caso classico: $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ è un operatore tra spazi di Hilbert.
- Si può generalizzare al caso di un'equazione tra spazi di Banach? Ci sono motivi per farlo? Sì (vedremo perché)...

Regolarizzazione di Tikhonov in spazi di Hilbert

Riprendiamo per adesso i problemi inversi in spazi di Hilbert.

.

Regolarizzazione di Tikhonov in spazi di Hilbert

Riprendiamo per adesso i problemi inversi in spazi di Hilbert.
Una prima opzione per risolverli è la regolarizzazione di Tikhonov

$$x_\alpha = \min_x \left(\frac{1}{2} \|Fx - y\|_{\mathcal{Y}}^2 + \alpha \frac{1}{2} \|x\|_{\mathcal{X}}^2 \right).$$

.

Regolarizzazione di Tikhonov in spazi di Hilbert

Riprendiamo per adesso i problemi inversi in spazi di Hilbert.
Una prima opzione per risolverli è la regolarizzazione di Tikhonov

$$x_\alpha = \min_x \left(\frac{1}{2}\|Fx - y\|_{\mathcal{Y}}^2 + \alpha \frac{1}{2}\|x\|_{\mathcal{X}}^2 \right).$$

- α è un parametro di regolarizzazione (rappresenta un compromesso tra la fedeltà della soluzione al dato e la regolarità della stessa).

Regolarizzazione di Tikhonov in spazi di Hilbert

Riprendiamo per adesso i problemi inversi in spazi di Hilbert.
Una prima opzione per risolverli è la regolarizzazione di Tikhonov

$$x_\alpha = \min_x \left(\frac{1}{2} \|Fx - y\|^2_{\mathcal{Y}} + \alpha \frac{1}{2} \|x\|^2_{\mathcal{X}} \right).$$

- α è un parametro di regolarizzazione (rappresenta un compromesso tra la fedeltà della soluzione al dato e la regolarità della stessa).
- Per trovare un valore buono di α, occorre risolvere il problema di minimo diverse volte

Regolarizzazione di Tikhonov in spazi di Hilbert

Riprendiamo per adesso i problemi inversi in spazi di Hilbert.
Una prima opzione per risolverli è la regolarizzazione di Tikhonov

$$x_\alpha = \min_x \left(\frac{1}{2}\|Fx - y\|^2_{\mathcal{Y}} + \alpha \frac{1}{2}\|x\|^2_{\mathcal{X}} \right).$$

- α è un parametro di regolarizzazione (rappresenta un compromesso tra la fedeltà della soluzione al dato e la regolarità della stessa).
- Per trovare un valore buono di α, occorre risolvere il problema di minimo diverse volte $\Rightarrow$ numericamente pesante...

Il metodo di Landweber in spazi di Hilbert

Approccio alternativo: metodi iterativi come quello di Landweber

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k F^*(Fx_k - y),$$

Il metodo di Landweber in spazi di Hilbert

Approccio alternativo: metodi iterativi come quello di Landweber

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k F^*(Fx_k - y),$$

che può essere interpretato come uno schema di punto fisso o come una procedura di minimizzazione iterativa del funzionale convesso

$$H_2(x) = \frac{1}{2}\|Fx - y\|_{\mathcal{Y}}^2.$$

Il metodo di Landweber in spazi di Hilbert

Approccio alternativo: metodi iterativi come quello di Landweber

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k F^*(Fx_k - y),$$

che può essere interpretato come uno schema di punto fisso o come una procedura di minimizzazione iterativa del funzionale convesso

$$H_2(x) = \frac{1}{2}\|Fx - y\|_{\mathcal{Y}}^2.$$

- In questo caso il parametro di regolarizzazione è rappresentato dall'indice di iterazione k.

Il metodo di Landweber in spazi di Hilbert

Approccio alternativo: metodi iterativi come quello di Landweber

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k F^*(Fx_k - y),$$

che può essere interpretato come uno schema di punto fisso o come una procedura di minimizzazione iterativa del funzionale convesso

$$H_2(x) = \frac{1}{2}\|Fx - y\|^2_{\mathcal{Y}}.$$

- In questo caso il parametro di regolarizzazione è rappresentato dall'indice di iterazione k.
- Convergenza lenta, ma di fatto l'arresto è anticipato per impedire la ricostruzione di componenti affette da rumore.

Vantaggi e svantaggi degli spazi di Hilbert

Vantaggi

Vantaggi e svantaggi degli spazi di Hilbert

Vantaggi

- Gli spazi di Hilbert sono dotati di prodotto scalare e godono di proprietà che li rendono simili agli spazi euclidei.

Vantaggi e svantaggi degli spazi di Hilbert

Vantaggi

- Gli spazi di Hilbert sono dotati di prodotto scalare e godono di proprietà che li rendono simili agli spazi euclidei.
- Possibilità di utilizzare la teoria spettrale per studiare gli operatori lineari (strumento potente per studiare la convergenza e le proprietà di regolarizzazione dei metodi).

Vantaggi e svantaggi degli spazi di Hilbert

Vantaggi

- Gli spazi di Hilbert sono dotati di prodotto scalare e godono di proprietà che li rendono simili agli spazi euclidei.
- Possibilità di utilizzare la teoria spettrale per studiare gli operatori lineari (strumento potente per studiare la convergenza e le proprietà di regolarizzazione dei metodi).

Svantaggi

Vantaggi e svantaggi degli spazi di Hilbert

Vantaggi

- Gli spazi di Hilbert sono dotati di prodotto scalare e godono di proprietà che li rendono simili agli spazi euclidei.
- Possibilità di utilizzare la teoria spettrale per studiare gli operatori lineari (strumento potente per studiare la convergenza e le proprietà di regolarizzazione dei metodi).

Svantaggi

- Le soluzioni ottenute tramite regolarizzazione sono a volte troppo regolari e rendono difficile ricostruire segnali che presentino brusche variazioni.

Vantaggi e svantaggi degli spazi di Hilbert

Vantaggi

- Gli spazi di Hilbert sono dotati di prodotto scalare e godono di proprietà che li rendono simili agli spazi euclidei.
- Possibilità di utilizzare la teoria spettrale per studiare gli operatori lineari (strumento potente per studiare la convergenza e le proprietà di regolarizzazione dei metodi).

Svantaggi

- Le soluzioni ottenute tramite regolarizzazione sono a volte troppo regolari e rendono difficile ricostruire segnali che presentino brusche variazioni.
- Nella ricostruzione di immagini, questo si traduce nella difficoltà di localizzare in maniera nitida i bordi degli oggetti.

Vantaggi e svantaggi degli spazi di Banach

Vantaggi

Vantaggi e svantaggi degli spazi di Banach

Vantaggi

- Riduzione del fenomeno dell'*oversmoothing*, possibilità di ricostruire in modo soddisfacente segnali di tipo impulsivo.

Vantaggi e svantaggi degli spazi di Banach

Vantaggi

- Riduzione del fenomeno dell'*oversmoothing*, possibilità di ricostruire in modo soddisfacente segnali di tipo impulsivo.
- Lavorare in spazi di Banach favorisce la sparsità delle soluzioni, caratteristica utile su problemi di grandi dimensioni (costo computazionale e di memoria ridotto).

Vantaggi e svantaggi degli spazi di Banach

Vantaggi

- Riduzione del fenomeno dell'*oversmoothing*, possibilità di ricostruire in modo soddisfacente segnali di tipo impulsivo.
- Lavorare in spazi di Banach favorisce la sparsità delle soluzioni, caratteristica utile su problemi di grandi dimensioni (costo computazionale e di memoria ridotto).

Svantaggi

Vantaggi e svantaggi degli spazi di Banach

Vantaggi

- Riduzione del fenomeno dell'*oversmoothing*, possibilità di ricostruire in modo soddisfacente segnali di tipo impulsivo.
- Lavorare in spazi di Banach favorisce la sparsità delle soluzioni, caratteristica utile su problemi di grandi dimensioni (costo computazionale e di memoria ridotto).

Svantaggi

- Si ottengono metodi più difficili da studiare (sono necessari concetti di analisi sofisticati) e non immediati dal punto di vista intuitivo.

Generalizzazione dell'iterazione di Landweber

Cerchiamo di capire come generalizzare l'algoritmo di Landweber.

Generalizzazione dell'iterazione di Landweber

Cerchiamo di capire come generalizzare l'algoritmo di Landweber.

- $F^* : \mathcal{Y}^* \to \mathcal{X}^*$ è l'operatore duale di F, ossia l'operatore tale che

  $$(F^* y^*)(x) = y^*(Fx) \text{ per ogni } x \in \mathcal{X}, y^* \in \mathcal{Y}^*,$$

  dove $\mathcal{X}^*$ e $\mathcal{Y}^*$ sono gli spazi duali di $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$.

Generalizzazione dell'iterazione di Landweber

Cerchiamo di capire come generalizzare l'algoritmo di Landweber.

- $F^* : \mathcal{Y}^* \to \mathcal{X}^*$ è l'operatore duale di F, ossia l'operatore tale che

$$(F^* y^*)(x) = y^*(Fx) \text{ per ogni } x \in \mathcal{X}, y^* \in \mathcal{Y}^*,$$

  dove $\mathcal{X}^*$ e $\mathcal{Y}^*$ sono gli spazi duali di $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$.
- Ora, se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ sono spazi di Hilbert, grazie al Teorema di Rappresentazione di Riesz sappiamo che $\mathcal{X}$ è isomorfo a $\mathcal{X}^*$, e lo stesso per $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Y}^*$, per cui possiamo vedere F^* come operatore da $\mathcal{Y}$ in $\mathcal{X}$. L'iterazione di Landweber risulta così ben definita...

Generalizzazione dell'iterazione di Landweber

Cerchiamo di capire come generalizzare l'algoritmo di Landweber.

- $F^* : \mathcal{Y}^* \to \mathcal{X}^*$ è l'operatore duale di F, ossia l'operatore tale che

$$(F^* y^*)(x) = y^*(Fx) \text{ per ogni } x \in \mathcal{X}, y^* \in \mathcal{Y}^*,$$

  dove $\mathcal{X}^*$ e $\mathcal{Y}^*$ sono gli spazi duali di $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$.
- Ora, se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ sono spazi di Hilbert, grazie al Teorema di Rappresentazione di Riesz sappiamo che $\mathcal{X}$ è isomorfo a $\mathcal{X}^*$, e lo stesso per $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Y}^*$, per cui possiamo vedere F^* come operatore da $\mathcal{Y}$ in $\mathcal{X}$. L'iterazione di Landweber risulta così ben definita...
- ... ma questo in uno spazio di Banach non vale!

Iterazioni di tipo Landweber in spazi di Banach

- In generale, uno spazio di Banach non è isomorfo al suo duale, per cui un termine del tipo $F^*(Fx_k - y)$ non ha senso, perché l'operatore F^* non può essere applicato a $Fx_k - y \in \mathcal{Y}$...

Iterazioni di tipo Landweber in spazi di Banach

- In generale, uno spazio di Banach non è isomorfo al suo duale, per cui un termine del tipo $F^*(Fx_k - y)$ non ha senso, perché l'operatore F^* non può essere applicato a $Fx_k - y \in \mathcal{Y}$...
- ...né d'altra parte potremmo sommare x_k all'elemento restituito da F^*, che apparterrebbe a $\mathcal{X}^*$.

Iterazioni di tipo Landweber in spazi di Banach

- In generale, uno spazio di Banach non è isomorfo al suo duale, per cui un termine del tipo $F^*(Fx_k - y)$ non ha senso, perché l'operatore F^* non può essere applicato a $Fx_k - y \in \mathcal{Y}$...
- ...né d'altra parte potremmo sommare x_k all'elemento restituito da F^*, che apparterrebbe a $\mathcal{X}^*$.
- Occorre allora uno schema generale che somigli ad un metodo di discesa in $\mathcal{X}^*$, del tipo

$$\tilde{x}_{k+1}^* = \tilde{x}_k^* - \lambda_k \Phi_F(x_k, y),$$

dove $\Phi_F(x_k, y)$ deve essere una qualche sorta di "differenziale" del funzionale $H_r(x) = \frac{1}{r}\|Fx - y\|_{\mathcal{Y}}^r$.

Iterazioni di tipo Landweber in spazi di Banach

- In generale, uno spazio di Banach non è isomorfo al suo duale, per cui un termine del tipo $F^*(Fx_k - y)$ non ha senso, perché l'operatore F^* non può essere applicato a $Fx_k - y \in \mathcal{Y}$...
- ...né d'altra parte potremmo sommare x_k all'elemento restituito da F^*, che apparterrebbe a $\mathcal{X}^*$.
- Occorre allora uno schema generale che somigli ad un metodo di discesa in $\mathcal{X}^*$, del tipo

$$\tilde{x}^*_{k+1} = \tilde{x}^*_k - \lambda_k \Phi_F(x_k, y),$$

  dove $\Phi_F(x_k, y)$ deve essere una qualche sorta di "differenziale" del funzionale $H_r(x) = \frac{1}{r}\|Fx - y\|^r_{\mathcal{Y}}$.
- Ci vuole infine una funzione che associ a $\tilde{x}^*_{k+1} \in \mathcal{X}^*$ una nuova iterata $x_{k+1} \in \mathcal{X}$.

Mappe di dualità

Il concetto che ci serve è quello di mappa di dualità. Si tratta di una particolare funzione che associa un elemento di uno spazio di Banach $\mathcal{B}$ con un elemento del suo duale $\mathcal{B}^*$.

Mappe di dualità

Il concetto che ci serve è quello di mappa di dualità. Si tratta di una particolare funzione che associa un elemento di uno spazio di Banach $\mathcal{B}$ con un elemento del suo duale $\mathcal{B}^*$.

- Assegnati $b \in \mathcal{B}$ e $b^* \in \mathcal{B}^*$, introduciamo la notazione

$$b^*(b) = \langle b^*, b \rangle = \langle b, b^* \rangle \in \mathbb{R}.$$

Mappe di dualità

Il concetto che ci serve è quello di mappa di dualità. Si tratta di una particolare funzione che associa un elemento di uno spazio di Banach $\mathcal{B}$ con un elemento del suo duale $\mathcal{B}^*$.

- Assegnati $b \in \mathcal{B}$ e $b^* \in \mathcal{B}^*$, introduciamo la notazione

$$b^*(b) = \langle b^*, b \rangle = \langle b, b^* \rangle \in \mathbb{R}.$$

- Dato $r > 1$, definiamo la mappa di dualità $J_r^{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to 2^{\mathcal{B}^*}$ come l'operatore multi-valore tale che per ogni $b \in \mathcal{B}$

$$J_r^{\mathcal{B}}(b) = \{ b^* \in \mathcal{B}^* : \langle b^*, b \rangle = \|b\|_{\mathcal{B}} \|b^*\|_{\mathcal{B}^*}, \|b^*\|_{\mathcal{B}^*} = \|b\|_{\mathcal{B}}^{r-1} \}.$$

Mappe di dualità

Il concetto che ci serve è quello di mappa di dualità. Si tratta di una particolare funzione che associa un elemento di uno spazio di Banach $\mathcal{B}$ con un elemento del suo duale $\mathcal{B}^*$.

- Assegnati $b \in \mathcal{B}$ e $b^* \in \mathcal{B}^*$, introduciamo la notazione

$$b^*(b) = \langle b^*, b \rangle = \langle b, b^* \rangle \in \mathbb{R}.$$

- Dato $r > 1$, definiamo la mappa di dualità $J_r^{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to 2^{\mathcal{B}^*}$ come l'operatore multi-valore tale che per ogni $b \in \mathcal{B}$

$$J_r^{\mathcal{B}}(b) = \{b^* \in \mathcal{B}^* : \langle b^*, b \rangle = \|b\|_{\mathcal{B}} \|b^*\|_{\mathcal{B}^*}, \|b^*\|_{\mathcal{B}^*} = \|b\|_{\mathcal{B}}^{r-1}\}.$$

- Il valore di r in realtà non ha grande importanza in quanto agisce soltanto come fattore di scala, in virtù dell'identità

$$J_r^{\mathcal{B}}(b) = \|b\|_{\mathcal{B}}^{r-2} J_2^{\mathcal{B}}(b) \text{ per ogni } b \in \mathcal{B}, b \neq 0.$$

Mappe di dualità

- Si può vedere che se lo spazio è di Hilbert la mappa $J_2^{\mathcal{B}}$ non è altro che l'isomorfismo isometrico tra $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}^*$. Pertanto, in virtù del Teorema di Rappresentazione di Riesz, possiamo identificarlo con l'identità, riconducendoci allo schema classico.

Mappe di dualità

- Si può vedere che se lo spazio è di Hilbert la mappa $J_2^{\mathcal{B}}$ non è altro che l'isomorfismo isometrico tra $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}^*$. Pertanto, in virtù del Teorema di Rappresentazione di Riesz, possiamo identificarlo con l'identità, riconducendoci allo schema classico.
- In generale, si presuppone la scelta di un elemento arbitrario nell'immagine della mappa. Tuttavia, nel caso degli spazi L^p, $p \in (1, \infty)$ si può mostrare che

$$J_r^{L^p}(x) = \|x\|_p^{r-p}|x|^{p-1}\text{sgn}(x).$$

Mappe di dualità

- Si può vedere che se lo spazio è di Hilbert la mappa $J_2^{\mathcal{B}}$ non è altro che l'isomorfismo isometrico tra $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}^*$. Pertanto, in virtù del Teorema di Rappresentazione di Riesz, possiamo identificarlo con l'identità, riconducendoci allo schema classico.
- In generale, si presuppone la scelta di un elemento arbitrario nell'immagine della mappa. Tuttavia, nel caso degli spazi L^p, $p \in (1, \infty)$ si può mostrare che

$$J_r^{L^p}(x) = \|x\|_p^{r-p}|x|^{p-1}\mathrm{sgn}(x).$$

- Uno spazio di Banach per il quale tutte le mappe di dualità restituiscono un unico elemento è detto *smooth*.

Il concetto di subdifferenziale

- Per capire il legame tra le mappe di dualità e lo schema di Landweber, introduciamo il concetto di subdifferenziale.

Il concetto di subdifferenziale

- Per capire il legame tra le mappe di dualità e lo schema di Landweber, introduciamo il concetto di subdifferenziale.
- Dato un funzionale convesso $f : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, il subdifferenziale di f è l'operatore multi-valore $\partial f : \mathcal{B} \to 2^{\mathcal{B}^*}$ definito nel modo seguente

$$\partial f(x_0) = \{g^* \in \mathcal{B}^* \mid f(x) \geq f(x_0) + \langle g^*, x - x_0 \rangle \ \forall x \in \mathcal{B}\}.$$

Il concetto di subdifferenziale

- Per capire il legame tra le mappe di dualità e lo schema di Landweber, introduciamo il concetto di subdifferenziale.
- Dato un funzionale convesso $f : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, il subdifferenziale di f è l'operatore multi-valore $\partial f : \mathcal{B} \to 2^{\mathcal{B}^*}$ definito nel modo seguente

$$\partial f(x_0) = \{g^* \in \mathcal{B}^* \mid f(x) \geq f(x_0) + \langle g^*, x - x_0 \rangle \ \forall x \in \mathcal{B}\}.$$

- Gli elementi di $\partial f(x_0)$ si dicono subgradienti. In sostanza si cerca di vedere il gradiente non più come elemento dello spazio di partenza, ma come operatore (elemento del duale) che associa ad ogni punto x dello spazio uno scalare.

Il concetto di subdifferenziale

- Per capire il legame tra le mappe di dualità e lo schema di Landweber, introduciamo il concetto di subdifferenziale.
- Dato un funzionale convesso $f : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, il subdifferenziale di f è l'operatore multi-valore $\partial f : \mathcal{B} \to 2^{\mathcal{B}^*}$ definito nel modo seguente

$$\partial f(x_0) = \{g^* \in \mathcal{B}^* \mid f(x) \geq f(x_0) + \langle g^*, x - x_0 \rangle \ \forall x \in \mathcal{B}\}.$$

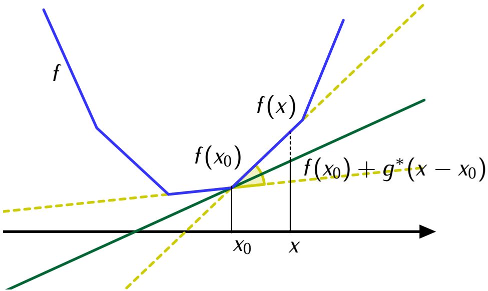
- Gli elementi di $\partial f(x_0)$ si dicono subgradienti. In sostanza si cerca di vedere il gradiente non più come elemento dello spazio di partenza, ma come operatore (elemento del duale) che associa ad ogni punto x dello spazio uno scalare.
- Nel caso di uno spazio euclideo o di Hilbert, tale numero è il prodotto scalare del (sub)gradiente con la direzione di movimento $x - x_0$, e indica se si tratta di una direzione di salita o discesa.

Il concetto di subdifferenziale

- Il subdifferenziale è stato concepito per generalizzare l'idea di gradiente nel contesto dell'ottimizzazione *nonsmooth*, dove l'obiettivo è quello di minimizzare una funzione non ovunque differenziabile.

Il concetto di subdifferenziale

- Il subdifferenziale è stato concepito per generalizzare l'idea di gradiente nel contesto dell'ottimizzazione *nonsmooth*, dove l'obiettivo è quello di minimizzare una funzione non ovunque differenziabile.
- Esempio 1-dimensionale: il subdifferenziale di una funzione convessa f in x_0 è l'insieme dei coefficienti angolari di tutti gli iperpiani di supporto di f in x_0.



Mappe di dualità come subdifferenziali

Il risultato seguente è fondamentale.

Mappe di dualità come subdifferenziali

Il risultato seguente è fondamentale.

Teorema (Asplund)

Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach e sia $r > 1$. Si ha allora che

$$J_r^{\mathcal{B}} = \partial f, \ \textit{dove } f(b) = \frac{1}{r}\|b\|_{\mathcal{B}}^r.$$

Mappe di dualità come subdifferenziali

Il risultato seguente è fondamentale.

Teorema (Asplund)

Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach e sia $r > 1$. Si ha allora che

$$J_r^{\mathcal{B}} = \partial f, \text{ dove } f(b) = \frac{1}{r}\|b\|_{\mathcal{B}}^r.$$

- Ricordiamo che il nostro obiettivo era di differenziare il funzionale $H_r(x) = \frac{1}{r}\|Fx - y\|_{\mathcal{Y}}^r$ rispetto a x.

Mappe di dualità come subdifferenziali

Il risultato seguente è fondamentale.

Teorema (Asplund)

Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach e sia $r > 1$. Si ha allora che

$$J_r^{\mathcal{B}} = \partial f, \ \textit{dove } f(b) = \frac{1}{r}\|b\|_{\mathcal{B}}^r.$$

- Ricordiamo che il nostro obiettivo era di differenziare il funzionale $H_r(x) = \frac{1}{r}\|Fx - y\|_{\mathcal{Y}}^r$ rispetto a x.
- Sfruttando il Teorema di Asplund e la derivazione di funzione composta si ottiene subito

$$\partial H_r(x) = F^* J_r^{\mathcal{Y}}(Fx - y).$$

Algoritmo di Landweber in spazi di Banach

Siamo finalmente in grado di dare forma compiuta all'algoritmo di Landweber.

Algoritmo di Landweber in spazi di Banach

Siamo finalmente in grado di dare forma compiuta all'algoritmo di Landweber.

- Siano r, $s > 1$ due valori fissati e s^* tale che $\frac{1}{s} + \frac{1}{s^*} = 1$. Sia x_0 il punto di partenza dell'iterazione (ad esempio $x_0 = 0$). Sia infine $\tilde{x}_0^* = J_s^{\mathcal{X}}(x_0) \in \mathcal{X}^*$. Per $k = 0, 1, \dots$ definiamo:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1}^* &= \tilde{x}_k^* - \lambda_k \Phi_F(x_k, y) \\ x_{k+1} &= J_{s^*}^{\mathcal{X}^*}(\tilde{x}_{k+1}^*), \end{aligned}$$

  con $\Phi_F(x_k, y) = F^* J_r^{\mathcal{Y}}(Fx_k - y) \in \partial H_r(x_k)$.

Algoritmo di Landweber in spazi di Banach

Siamo finalmente in grado di dare forma compiuta all'algoritmo di Landweber.

- Siano r, $s > 1$ due valori fissati e s^* tale che $\frac{1}{s} + \frac{1}{s^*} = 1$. Sia x_0 il punto di partenza dell'iterazione (ad esempio $x_0 = 0$). Sia infine $\tilde{x}_0^* = J_s^{\mathcal{X}}(x_0) \in \mathcal{X}^*$. Per $k = 0, 1, \ldots$ definiamo:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1}^* &= \tilde{x}_k^* - \lambda_k \Phi_F(x_k, y) \\ x_{k+1} &= J_{s^*}^{\mathcal{X}^*}(\tilde{x}_{k+1}^*), \end{aligned}$$

  con $\Phi_F(x_k, y) = F^* J_r^{\mathcal{Y}}(Fx_k - y) \in \partial H_r(x_k)$.
- Osserviamo che $J_{s^*}^{\mathcal{X}^*}$ è una funzione da $\mathcal{X}^*$ in $2^{\mathcal{X}^{**}}$. Pertanto affinché l'iterazione sia ben definita è necessario che $\mathcal{X}$ sia riflessivo, ovvero che $\mathcal{X}^{**}$ sia isometricamente isomorfo a $\mathcal{X}$. In questo modo ci assicuriamo che $J_{s^*}^{\mathcal{X}^*} \subset \mathcal{X}$.

Risultati di convergenza

Teorema (Schöpfer, Louis, Schuster)

Siano $\mathcal{X}$ uno spazio di Banach riflessivo e $\mathcal{Y}$ uno spazio di Banach arbitrario. Sia $x^\dagger$ soluzione generalizzata di $Fx = y$, con $y \in \mathcal{R}(F)$. Sia $\{x_k\}$ la successione delle iterazioni generata dall'algoritmo di Landweber. Scegliendo opportunamente λ_k, si ha che

$$\lim_{k \to \infty} \|x_k - x^\dagger\|_{\mathcal{X}} = 0.$$

Risultati di convergenza

Teorema (Schöpfer, Louis, Schuster)

Siano $\mathcal{X}$ uno spazio di Banach riflessivo e $\mathcal{Y}$ uno spazio di Banach arbitrario. Sia $x^\dagger$ soluzione generalizzata di $Fx = y$, con $y \in \mathcal{R}(F)$. Sia $\{x_k\}$ la successione delle iterazioni generata dall'algoritmo di Landweber. Scegliendo opportunamente λ_k, si ha che

$$\lim_{k \to \infty} \|x_k - x^\dagger\|_{\mathcal{X}} = 0.$$

Supponiamo ora di avere dati perturbati y_k^δ tali che $\|y_k^\delta - y\| \leq \delta_k$, con δ_k strettamente decrescente e tendente a 0. Possiamo implementare il criterio della discrepanza e fermarci quando

$$\|Fx_k - y_k^\delta\| < \frac{1}{D}\delta_k,$$

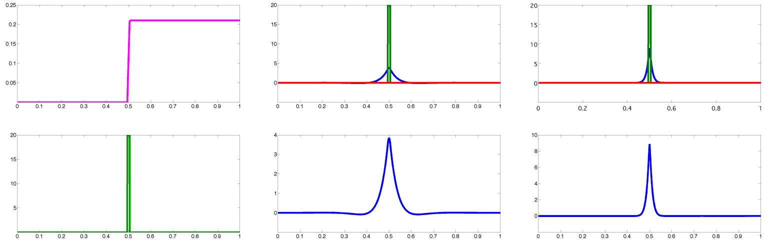
dove $D \in (0, 1)$. Si mostra che valgono gli stessi risultati di convergenza del teorema precedente.

Un semplice test di deconvoluzione 1-D

Risolviamo, data y, l'equazione $y(t) = \int_0^t x(s)ds$, $x, y : [0,1] \to [0,1]$. A sinistra, il dato e la soluzione esatta. Al centro e a destra, le ricostruzioni dopo 500 iterazioni di Landweber con $p = 2$ e $p = 1.2$.

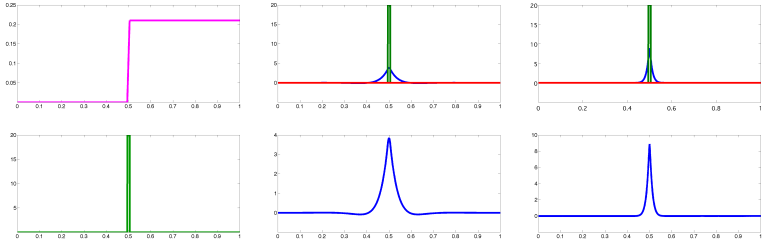
Un semplice test di deconvoluzione 1-D

Risolviamo, data y, l'equazione $y(t) = \int_0^t x(s)ds$, $x, y : [0,1] \to [0,1]$. A sinistra, il dato e la soluzione esatta. Al centro e a destra, le ricostruzioni dopo 500 iterazioni di Landweber con $p = 2$ e $p = 1.2$.



Un semplice test di deconvoluzione 1-D

Risolviamo, data y, l'equazione $y(t) = \int_0^t x(s)ds$, $x, y : [0, 1] \to [0, 1]$. A sinistra, il dato e la soluzione esatta. Al centro e a destra, le ricostruzioni dopo 500 iterazioni di Landweber con $p = 2$ e $p = 1.2$.



La ricostruzione per $p = 2$ è nettamente *oversmoothed*, raggiunge appena 1/5 dell'ampiezza del segnale e ha componenti negative non presenti nella soluzione vera. Evidente il miglioramento con Banach!

Sperimentazione sulle immagini

Vediamo come si comporta l'algoritmo su due problemi di *deblurring* di cui sia nota la soluzione esatta.

Sperimentazione sulle immagini

Vediamo come si comporta l'algoritmo su due problemi di *deblurring* di cui sia nota la soluzione esatta.

- Prendiamo per semplicità condizioni al contorno nulle. Nel primo caso il dato è ricavato per via sperimentale ed è affetto da rumore, nel secondo lo otteniamo da una PSF gaussiana.

Sperimentazione sulle immagini

Vediamo come si comporta l'algoritmo su due problemi di *deblurring* di cui sia nota la soluzione esatta.

- Prendiamo per semplicità condizioni al contorno nulle. Nel primo caso il dato è ricavato per via sperimentale ed è affetto da rumore, nel secondo lo otteniamo da una PSF gaussiana.
- Effettuiamo fino a $k = 200$ iterazioni e vediamo cosa succede all'immagine e all'errore di ricostruzione relativo.

Sperimentazione sulle immagini

Vediamo come si comporta l'algoritmo su due problemi di *deblurring* di cui sia nota la soluzione esatta.

- Prendiamo per semplicità condizioni al contorno nulle. Nel primo caso il dato è ricavato per via sperimentale ed è affetto da rumore, nel secondo lo otteniamo da una PSF gaussiana.
- Effettuiamo fino a $k = 200$ iterazioni e vediamo cosa succede all'immagine e all'errore di ricostruzione relativo.
- Sperimentiamo con le norme L^p con $p \in (1, 2]$, dove $p = 2$ corrisponde al Landweber classico.

Sperimentazione sulle immagini

Vediamo come si comporta l'algoritmo su due problemi di *deblurring* di cui sia nota la soluzione esatta.

- Prendiamo per semplicità condizioni al contorno nulle. Nel primo caso il dato è ricavato per via sperimentale ed è affetto da rumore, nel secondo lo otteniamo da una PSF gaussiana.
- Effettuiamo fino a $k = 200$ iterazioni e vediamo cosa succede all'immagine e all'errore di ricostruzione relativo.
- Sperimentiamo con le norme L^p con $p \in (1, 2]$, dove $p = 2$ corrisponde al Landweber classico.
- Per valori troppo vicini a 1 si incontrano problemi numerici (per $p = 1$ l'iterazione di Landweber non è definita).

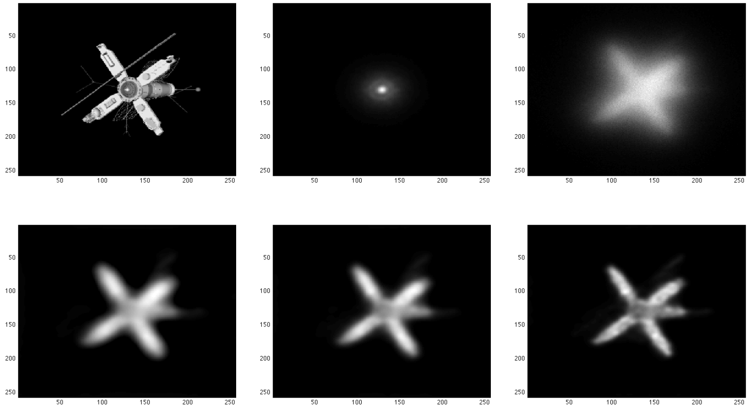
Sperimentazione sulle immagini

Vediamo come si comporta l'algoritmo su due problemi di *deblurring* di cui sia nota la soluzione esatta.

- Prendiamo per semplicità condizioni al contorno nulle. Nel primo caso il dato è ricavato per via sperimentale ed è affetto da rumore, nel secondo lo otteniamo da una PSF gaussiana.
- Effettuiamo fino a $k = 200$ iterazioni e vediamo cosa succede all'immagine e all'errore di ricostruzione relativo.
- Sperimentiamo con le norme L^p con $p \in (1, 2]$, dove $p = 2$ corrisponde al Landweber classico.
- Per valori troppo vicini a 1 si incontrano problemi numerici (per $p = 1$ l'iterazione di Landweber non è definita).
- La lunghezza del passo $\lambda_k = \tau$ è presa costante.

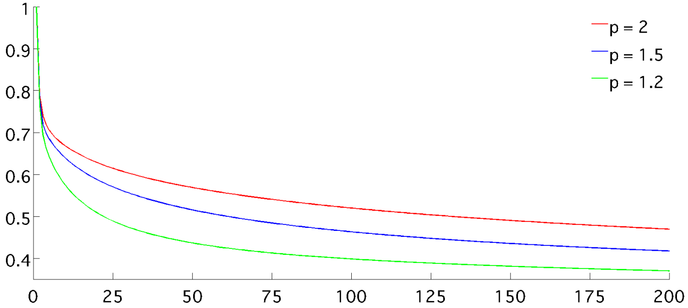
Risultati numerici

Satellite: in alto, immagine originale, PSF, immagine *blurred*; in basso, ricostruzioni per $p = 2, 1.5, 1.2$.



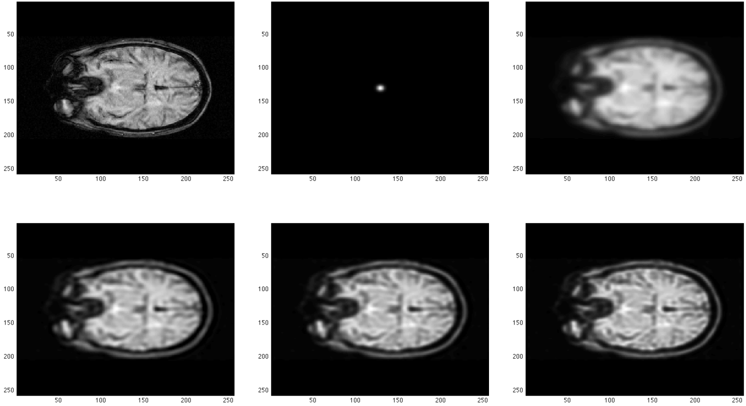
Risultati numerici

Satellite: andamento dell'errore relativo per $p = 2, 1.5, 1.2$.



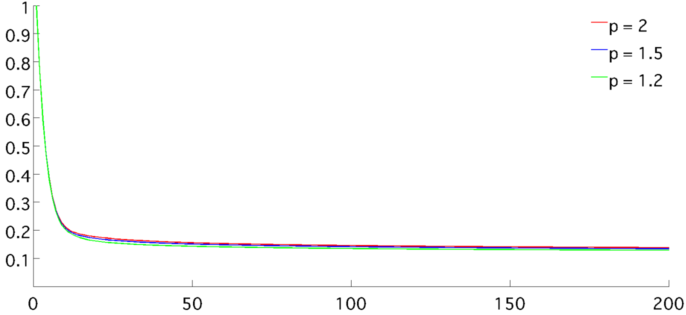
Risultati numerici

Cervello: in alto, immagine originale, PSF, immagine *blurred*; in basso, ricostruzioni per $p = 2, 1.5, 1.2$.



Risultati numerici

Cervello: andamento dell'errore relativo per $p = 2, 1.5, 1.2$.



Bibliografia

- C. Estatico. *Recent frameworks for regularization*, 2011 (slide).
- C. Estatico, M. Pastorino, A. Randazzo. *A novel microwave imaging approach based on regularization in Banach spaces*, 2011 (submitted).
- K. S. Kazimierski. *Minimization of the Tikhonov functional in Banach spaces smooth and convex of power type by steepest descent in the dual*, Computational Optimization and Applications **48**, No. 2 (2008), 309–324.
- F. Schöpfer, A. K. Louis, T. Schuster. *Nonlinear iterative methods for linear ill-posed problems in Banach Spaces*, Inverse Problems **22** (2006), 311–329.