Appendice A

A.1 Sistema singolare di operatori compatti e teorema di Picard

Siano X, Y spazi di Hilbert e $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ operatore compatto.
L'operatore autoaggiunto T^*T è la composizione di T compatto con T^* limitato, quindi è compatto; inoltre è semidefinito positivo, infatti, se λ è autovalore con corrispondente autovettore x di norma unitaria, allora
$\lambda = \lambda(x,x) = (T^*Tx, x) = \|Tx\| \geq 0$.

Indichiamo con λ_i gli autovalori reali positivi di T^*T, ognuno contato con la propria molteplicità e assumiamo $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots > 0$.

Sia $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}^*} \subset X$ una sequenza di autovettori ortonormali di T^*T associati agli autovalori λ_i. Si ponga

$$\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$$

$$v_i = \frac{1}{\mu_i} T u_i \,, \qquad v_i \in Y$$

Allora

(*a*)

$$\begin{aligned} (v_i, v_j) &= \frac{1}{\mu_i}\frac{1}{\mu_j}(Tu_i, Tu_j) \\ &= \frac{1}{\mu_i}\frac{1}{\mu_j}(T^*Tu_i, u_j) \\ &= \frac{\mu_i}{\mu_j}(u_i, u_j) = \delta_{i,j} \end{aligned}$$

con $\quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

(*b*)

$$\begin{aligned} TT^* v_i &= TT^*(\frac{1}{\mu_i} T u_i) = \frac{1}{\mu_i} T({\mu_i}^2 u_i) \\ &= \mu_i T u_i = {\mu_i}^2 v_i = \lambda_i v_i \end{aligned}$$

Quindi $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}^*} \subset Y$ risulta essere una famiglia di autovettori ortonormali associati agli autovalori $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots > 0$ dell'operatore TT^*.

Si osservi che $T^* v_i = \frac{1}{\mu_i} T^* T u_i = \mu_i u_i$ ossia

$$u_i = \frac{1}{\mu_i} T^* v_i$$

Si può dimostrare che $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ è un sistema ortonormale completo, ossia una base, per $\overline{R(T^*)} = N(T)^\perp$, mentre $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ è base per $\overline{R(T)} = N(T^*)^\perp$.

La terna $\{\mu_n; u_n, v_n\}$ viene detta **sistema singolare** di T.

Enunciamo un importante risultato, detto teorema di Picard, che fissa condizioni sufficienti e necessarie affinchè un'equazione lineare del tipo (1) del capitolo 1 sia risolubile.

Teorema A.1 (Teorema di Picard)
Sia $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ compatto con sistema singolare $\{\mu_n; u_n, v_n\}$.
Allora l'equazione $Tx = y$ con $x \in X$, $y \in Y$ ammette soluzioni se e solo se

$y \in N(T^*)^\perp$ *e*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n{}^2} |(y, v_i)_Y|^2 < \infty$$

La condizione richiesta dal teorema è una condizione di regolarità : l'equazione ha soluzioni ogni volta che le componenti del dato y, rispetto alla base $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ di $N(T^*)^\perp$, tendono a zero più rapidamente dei corrispondenti valori singolari.
Per una dimostrazione del teorema di Picard si consulti [15] .

Appendice B

B.1 Risoluzione spettrale di operatori autoaggiunti

Sia X uno spazio di Hilbert e $A \in \mathcal{B}(X,X)$ un operatore lineare autoaggiunto.
Consideriamo un generico polinomio reale

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$$

Una naturale estensione del concetto di polinomio allo spazio degli operatori lineari $\mathcal{B}(X,X)$ permette di definire l'operatore lineare $p(A)$ nel modo seguente

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i A^i \tag{B.1}$$

Poichè ogni polinomio è una funzione continua, nasce l'idea di dare un significato al concetto di funzione continua di operatore autoaggiunto.
Come vedremo in seguito, questo obiettivo può essere raggiunto per mezzo della risoluzione spettrale dell'operatore A, che permette di rappresentare l'operatore in una forma elegante e maneggevole. In questo modo sarà possibile generalizzare agli operatori autoaggiunti parecchi risultati formulati nel contesto degli operatori compatti autoaggiunti.
Si precisa che questa appendice ha solo lo scopo di introdurre l'argomento. In quest'ottica non verranno analizzate questioni riguardanti la commutatività degli operatori di proiezione, che verranno considerati sempre commutativi.
Per una semplice trattazione si consulti [15]; per una più esauriente si può consultare [39] .

Prima di addentrarci nella teoria più avanzata, consideriamo innanzitutto il caso in cui lo spazio X è di dimensione finita.
Fissata una base per X, l'operatore A può essere rappresentato per mezzo di una matrice simmetrica $\tilde{A} \in M_n(\mathbb{R})$, dove $M_n(\mathbb{R})$ rappresenta lo spazio delle matrici reali di dimensione $(n \times n)$.
Indichiamo con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori di $\tilde{A}$ e con $u_1, u_2, \ldots, u_n$ i rispettivi autovettori.
Supponiamo per semplicità $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$
e $\|u_i\| = 1 \quad \forall i = 1, \ldots, n$.
Sappiamo dall'algebra lineare che l'insieme $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$; quindi per ogni vettore $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$x = (x, u_1)u_1 + (x, u_2)u_2 + \ldots + (x, u_n)u_n$$

Definiamo allora famiglia spettrale associata alla matrice $\tilde{A}$, e la indichiamo con $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$, la famiglia di operatori di proiezione $E_\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tale che

$$\begin{aligned} E_\lambda &= 0 & \lambda &< \lambda_1 \\ E_\lambda &= P_{B_i} & \lambda_i \le \lambda &< \lambda_{i+1} \qquad i = 1, \ldots, n-1 \\ E_\lambda &= I & \lambda &\ge \lambda_n \end{aligned}$$

dove P_{B_i} è l'operatore di proiezione ortogonale sul sottospazio

$$B_i = span\{ u_1 , u_2 , \ldots , u_i \}$$

Si osservi che

(i) $\lim_{\lambda \longrightarrow \lambda_i^+} E_\lambda = E_\lambda$.
ossia E_λ è continua a destra rispetto a λ

(ii) $E_r \le E_s \qquad$ se $r < s$
dove la relazione d'ordine sta ad indicare che l'operatore $E_s - E_r$ è semidefinito positivo; infatti, posto
$r \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}) \quad$ e $\quad s \in [\lambda_j, \lambda_{j+1}) \qquad j \ge i$
allora $\quad E_s - E_r = P_{B_j} - P_{B_i} \ge 0 \quad$ poichè è operatore di proiezione (eventualmente nullo) sul sottospazio $span\{ u_{j+1} , \ldots , u_j \}$.

Indichiamo con $\{\Delta_i E\}_{i=1}^n$ la famiglia di operatori di proiezione definiti da

$$\begin{aligned} \Delta_1 E x &= E_{\lambda_1} x = (x, u_1) u_1 \\ \Delta_i E x &= (E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}) x = (x, u_i) u_i \qquad i = 2, \ldots, n \end{aligned}$$

Utilizzando la famiglia $\{\Delta_i E\}$ è possibile rappresentare $\tilde{A}$ nel seguente modo

$$\tilde{A}x = \lambda_1(x, u_1)u_1 + \lambda_2(x, u_2)u_2 + \ldots + \lambda_n(x, u_n)u_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Delta_i E x$$

Sulla base di questo semplice formalismo generalizziamo il concetto di famiglia spettrale ad operatori autoaggiunti definiti in spazi non necessariamente di dimensione finita. Indichiamo con $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ lo spettro di A, ossia

$$\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \; : \; A - \lambda I \ \text{ non è invertibile } \}$$

Un risultato fondamentale dell'analisi asserisce che, se A è autoaggiunto, allora

$$\sigma(A) \subset \mathbb{R}$$

Definizione B.1 *Sia* $A \in B(X,X)$ *autoaggiunto semidefinito positivo. Si definisce* **radice quadrata di A** *, e la si indica con* $A^{\frac{1}{2}}$, *l'operatore autoaggiunto semidefinito positivo tale che*

$$\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^2 = A$$

Un teorema garantisce l'esistenza e l'unicità della radice quadrata per ogni operatore autoaggiunto semidefinito positivo.

Indichiamo con $|A|$ l'operatore autoaggiunto definito dalla relazione seguente

$$|A| = (A^2)^{\frac{1}{2}}$$

Si osservi che, poichè A è autoaggiunto, A^2 è semidefinito positivo, infatti

$$(A^2 x, x) = (AAx, x) = (Ax, Ax) \ge 0$$

e quindi la definizione di $|A|$ è ben posta.

Definizione B.2 *Gli operatori autoaggiunti* A^+, A^- *definiti da*

$$A^+ = \frac{(A + |A|)}{2} \qquad A^- = \frac{(A - |A|)}{2}$$

vengono detti rispettivamente **parte positiva** *e* **parte negativa** *dell'operatore autoaggiunto* A

Si osservi che se A è semidefinito positivo, allora $|A| = A$ e quindi

$$A^+ = A \qquad A^- = 0$$

e simmetricamente, se A è semidefinito negativo ,

$$A^+ = 0 \qquad A^- = A$$

infatti $|A| = -A$.

Definizione B.3 *Se* $A \in B(X,X)$ *autoaggiunto, allora* $A_\lambda \in B(X,X)$ *è l'operatore autoaggiunto definito dalla relazione seguente*

$$A_\lambda = A - \lambda I$$

dove $I \in B(X,X)$ *rappresenta l'operatore identità.*

Indicando con

$$\begin{aligned} m_A &= \inf\{ (Ax, x) \; : \; x \in X \, , \; \|x\| = 1 \} \\ M_A &= \sup\{ (Ax, x) \; : \; x \in X \, , \; \|x\| = 1 \} \end{aligned}$$

si ha

$$m_A I \le A \le M_A I$$

Questo implica che

(i) $A_\lambda = A_\lambda^{\,+} \qquad$ per $\lambda \le m_A$

(ii) $A_\lambda = A_\lambda^{\,-} \qquad$ per $\lambda \ge M_A$

infatti per $\lambda \leq m_A$ si ha $\quad A_\lambda = A - \lambda I \geq m_A I - \lambda I = (m_A - \lambda)I \geq 0$,
ossia $A_\lambda = A_\lambda{}^+$,
e per $\lambda \geq M_A$ si ha $\quad A_\lambda = A - \lambda I \leq M_A I - \lambda I = (M_A - \lambda)I \leq 0$.
Abbiamo tutti gli strumenti necessari per poter definire la famiglia spettrale di un operatore autoaggiunto $A \in B(X, X)$.

Definizione B.4 *Sia $A \in B(X,X)$ autoaggiunto.*
Si definisce **famiglia spettrale associata ad** A *, la famiglia di operatori di proiezione $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ tale che*

$$E_\lambda = P_{N(A_\lambda{}^+)}$$

dove $P_{N(A_\lambda{}^+)}$ rappresenta l'operatore di proiezione ortogonale sul sottospazio nullo dell'operatore $A_\lambda{}^+$.

Lemma B.1 *(i)* $\quad E_\lambda = 0 \quad$ *se* $\lambda < m_A$

(ii) $\quad E_\lambda = I \quad$ *se* $\lambda \geq M_A$

Dimostrazione. Se $\lambda < m_A$ allora $\lambda \notin \sigma(A)$.
Segue che $N(A_\lambda) = N(A - \lambda I) = \emptyset$ poichè $(A - \lambda I)$ è invertibile.
Inoltre poichè $A_\lambda = A_\lambda{}^+$, allora $N(A_\lambda{}^+) = \emptyset$
che implica $E_\lambda = P_{N(A_\lambda{}^+)} = 0$.
Analogamente se $\lambda \geq M_A$, allora $A_\lambda = A_\lambda{}^-$ che implica $A_\lambda{}^+ = 0$.
Si ha così $E_\lambda = P_{N(A_\lambda{}^+)} = P_X = I$. ∎

Si ha anche il seguente risultato

Lemma B.2 *Se* $\lambda_1 \leq \lambda_2$ *allora*

(i) $\quad E_{\lambda_1} E_{\lambda_2} = E_{\lambda_1}$

(ii) $\quad E_{\lambda_1} \leq E_{\lambda_2}$

(iii) $\quad \lambda_1(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}) \leq A(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}) \leq \lambda_2(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1})$

Dimostrazione. Si osservi che le relazioni sono ovvie se $\lambda_1 = \lambda_2$.
Consideriamo quindi $\lambda_1 < \lambda_2$.
Per verificare le prime due relazioni , poniamo

$$P = E_{\lambda_1}(I - E_{\lambda_2})$$

e dimostriamo che $P = 0$.
In questo modo la relazione (i) risulta banalmente verificata e inoltre, osservando che $(I - E_{\lambda_1})$ e E_{λ_2} sono semidefiniti positivi, e che
$E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1} = E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1} + P = E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}E_{\lambda_2} = (I - E_{\lambda_1})E_{\lambda_2}$,
segue che anche (ii) risulta verificata.

Dimostriamo che $P = 0$.
Si osservi che
$E_{\lambda_1}P = E_{\lambda_1}{}^2(I - E_{\lambda_2}) = E_{\lambda_1}(I - E_{\lambda_2}) = P$

e
$(I - E_{\lambda_2})P = E_{\lambda_1}(I - E_{\lambda_2})^2 = E_{\lambda_1}(I - E_{\lambda_2}) = P$
Ponendo $z = Px \quad \forall x \in X$, allora
$E_{\lambda_1} z = z \quad$ e $\quad (I - E_{\lambda_2})z = z$
Segue che
$A_{\lambda_1}E_{\lambda_1} = A_{\lambda_1}{}^+E_{\lambda_1} + A_{\lambda_1}{}^-E_{\lambda_1} = A_{\lambda_1}{}^+P_{N(A_{\lambda_1}{}^+)} + A_{\lambda_1}{}^-E_{\lambda_1} = A_{\lambda_1}{}^-$
quindi
$(A_{\lambda_1}z, z) = (A_{\lambda_1}E_{\lambda_1}z, z) = (A_{\lambda_1}{}^-z, z) \leq 0$
Analogamente
$(A_{\lambda_2}z, z) = (A_{\lambda_2}(I - E_{\lambda_2})z, z) = (A_{\lambda_2} - A_{\lambda_2}E_{\lambda_2}z, z)$
$\quad = (A_{\lambda_2} - A_{\lambda_2}{}^-z, z) = (A_{\lambda_2}{}^+z, z) \geq 0$
Dalle ultime due relazioni segue che

$$(A_{\lambda_1}z, z) - (A_{\lambda_2}z, z) = ((A_{\lambda_1} - A_{\lambda_2})z, z) \leq 0$$

che implica

$$((A_{\lambda_1} - A_{\lambda_2})z, z) = ((A_\lambda - \lambda_1 I - A_\lambda + \lambda_2 I)z, z) = (\lambda_2 - \lambda_1)\|z\|^2 \leq 0$$

Questo equivale a dire che $z = Px = 0 \quad \forall x \in X$, ossia $P = 0$. Le prime due relazioni sono così verificate .

Dimostriamo la terza.
Da (i) segue che $E_{\lambda_1}(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}) = 0$. Si ha così

$$\begin{aligned} A_{\lambda_1}(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}) &= A_{\lambda_1}(I - E_{\lambda_1})(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}) = (A_{\lambda_1} - A_{\lambda_1}E_{\lambda_1})(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}) \\ &= (A_{\lambda_1} - A_{\lambda_1}{}^-)(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}) = (A_{\lambda_1}{}^+)(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}) \geq 0 \end{aligned}$$

(si osservi che, considerando (ii) appena dimostrato, nell'ultima diseguaglianza si ha una composizione di operatori semidefiniti positivi) .
Analogamente si ha

$$\begin{aligned} A_{\lambda_2}(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}) &= A_{\lambda_2}E_{\lambda_2}(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}) \\ &= (A_{\lambda_2}{}^-)(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}) \leq 0 \end{aligned}$$

Le due ultime diseguaglianze dimostrano (iii) . ∎

Si consideri la somma di Riemann definita nel modo seguente

$$\sum_{i=1}^{n} \hat\lambda_i(E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}) \tag{B.2}$$

dove $\{\lambda_i\}_{i=0}^n$ è una partizione di $[a,b] \supset [m_A, M_A]$ tale che
$a = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = b$
e $\quad \hat\lambda_i \in [\lambda_{i-1}, \lambda_i]$.
Il prossimo teorema mostra che, $\quad \forall \epsilon > 0$, allora $\exists \delta > 0$ tale che, se

$$\max_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) < \delta$$

allora , per ogni scelta dei punti $\hat\lambda_i$ si ha

$$\|A - \sum_{i=1}^{n} \hat\lambda_i(E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}})\| < \epsilon$$

La somma di Riemann, come avviene nel calcolo integrale di funzioni reali, per $\epsilon \longrightarrow 0$ consente di dare significato alla seguente scrittura

$$A = \int_{\sigma(A)} \lambda \, dE_\lambda$$

che viene detta **risoluzione spettrale dell'operatore autoaggiunto** A .

Teorema B.1 *Se* $A \in \mathcal{B}(X,X)$ *è autoaggiunto ,*
allora esiste una famiglia $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ *di operatori di proiezione ortogonale su* X *tale che*

(a) $E_{\lambda_1} \leq E_{\lambda_2}$ *se* $\lambda_1 \leq \lambda_2$

(b) $E_\lambda = 0$ *se* $\lambda < m_A$
$E_\lambda = I$ *se* $\lambda \geq M_A$

(c) *se* $TA = AT$ *con* $T \in \mathcal{B}(X,X)$ *, allora* $TE_\lambda = E_\lambda T \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(d) $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow \lambda_*^+} E_\lambda x = E_{\lambda_*} x \qquad \forall x \in X \qquad \forall \lambda_* \in \mathbb{R}$

(e) $A = \int_a^b \lambda \, dE_\lambda \qquad \forall a < m_A \ , \ b \geq M_A$

Dimostrazione. Verrà illustrata solo la dimostrazione della risoluzione spettrale (d). Per le altre relazioni si rimanda ai già citati testi di analisi funzionale.

Come accennato, la verifica di (d) poggia sulla costruzione delle somme di Riemann $(B.2)$.
Sia $a < m_A$ e $b \geq M_A$
$a = \lambda_0 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n = b$
una generica partizione di $[a, b] \supset [m_A, M_A]$.
Dai lemma B.2 (iii) e B.1 segue

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i-1}(E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}) &\leq A\sum_{i=1}^{n}(E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}) \\
&= A(E_b - E_a) = A(I-0) = A \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}})
\end{aligned}$$

Fissato $\epsilon > 0$, si può scegliere la partizione in modo che

$$\max_{1 \leq i \leq n}(\lambda_i - \lambda_{i-1}) < \epsilon$$

Allora, per ogni scelta degli $\hat{\lambda}_i \in [\lambda_{i-1}, \lambda_i]$, utilizzando l'ultima relazione verificata si ha

$$\begin{aligned}
A - \sum_{i=1}^{n}\hat{\lambda}_i(E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}) &\leq \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i - \hat{\lambda}_i)(E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i - \lambda_{i-1})(E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}) \\
&\leq \epsilon\sum_{i=1}^{n}(E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}) \\
&= \epsilon(E_b - E_a) = \epsilon I
\end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}
A - \sum_{i=1}^{n}\hat{\lambda}_i(E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}) &\geq \sum_{i=1}^{n}(\lambda_{i-1} - \hat{\lambda}_i)(E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}) \\
&\geq \sum_{i=1}^{n}(\lambda_{i-1} - \lambda_i)(E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}) \\
&\geq -\epsilon\sum_{i=1}^{n}(E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}) \\
&= -\epsilon(E_b - E_a) = -\epsilon I
\end{aligned}$$

Si ottiene così

$$\|A - \sum_{i=1}^{n}\hat{\lambda}_i(E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}})\| \leq \epsilon$$

che, per l'arbitrarietà di ϵ , verifica la tesi (d) . ∎

Un semplice confronto con quanto fatto in spazi di dimensione finita aiuta a comprendere il significato della risoluzione spettrale (d) .
A tale scopo si consideri la tabella seguente :

$$\begin{array}{ccc}
\Delta_i E & \longleftrightarrow & d\,E_\lambda \qquad \lambda \in [\lambda_i, \lambda i + 1) \\
A = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Delta_i E & \longleftrightarrow & \int_a^b \lambda \, d\,E_\lambda = A
\end{array}$$

Si osservi inoltre che, operando un calcolo al limite come nella dimostrazione precedente, si ottiene

$$I = \int_a^b d\,E_\lambda \qquad \forall \ a < m_A \quad b \geq M_A$$

Come già accennato, per mezzo della risoluzione spettrale (d) è possibile dare un significato al concetto di funzione continua di operatore autoaggiunto.
Consideriamo innanzitutto espressioni polinomiali del tipo $(B.1)$.

Lemma B.3 *Sia* $A \in \mathcal{B}(X,X)$ *autoaggiunto e* $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ *la famiglia spettrale ad esso associata.*
Allora

(i) $A^k = \int_a^b \lambda^k \, d\,E_\lambda \qquad \forall \ a < m_A \ , \ b \geq M_A \qquad \forall k \in \mathbb{N}$

(ii) $p(A) = \int_a^b p(\lambda) \, d\,E_\lambda \qquad \forall \ a < m_A \ , \ b \geq M_A$
dove p *è un generico polinomio reale e la scrittura* $p(T)$ *va intesa come in* $(B.1)$

(iii) $\|p(A)\| \leq \|p\|_{C[a,b]}$

dove $\|\bullet\|_{C[a,b]}$ *è l'usuale norma della convergenza uniforme (o norma del "sup")*

Dimostrazione.

(i) Si consideri il formalismo introdotto nel teorema B.1 (d).
A^k risulta così il limite delle somme seguenti

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{\lambda}_i (E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}})\right)^k \qquad (B.3)$$

Si osservi che, per $i < j$, considerando il lemma B.2 (i) si ha

$$(E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}})(E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-1}}) = E_{\lambda_i}E_{\lambda_j} - E_{\lambda_i}E_{\lambda_{j-1}} - E_{\lambda_{i-1}}E_{\lambda_j} + E_{\lambda_{i-1}}E_{\lambda_{j-1}}$$
$$= E_{\lambda_i} - E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}} - E_{\lambda_{i-1}} = 0$$

ossia tutti i prodotti misti in $(B.3)$ sono nulli.
Inoltre poichè $E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}$ è un operatore di proiezione $(E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}})^k = E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}$.
Segue così che lo sviluppo della sommatoria $(B.3)$ si riduce a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{\lambda}_i (E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}})\right)^k = \sum_{i=1}^{n} \hat{\lambda}_i^k (E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}})$$

Passando al limite (cfr. dimostrazione teorema B.1 (d)) si ottiene la tesi (i).

(ii) La tesi è immediata considerando (i) appena dimostrato e le usuali proprietà di linearità dell'integrale. Si ottiene

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i A^i = \sum_{i=1}^{n} a_i \int_a^b \lambda^i \, dE_\lambda$$
$$= \int_a^b \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^i \, dE_\lambda = \int_a^b p(\lambda)\, dE_\lambda$$

che verifica (ii).

(iii) La tesi segue da (ii) ; infatti, considerando il teorema B.1 (d), si ottiene

$$\|p(T)\| = \left\| \int_a^b p(\lambda)\, dE_\lambda \right\|$$
$$\leq \|p\|_{C[a,b]} \left\| \int_a^b dE_\lambda \right\|$$
$$= \|p\|_{C[a,b]} \|I\| = \|p\|_{C[a,b]}$$

che conclude la dimostrazione del lemma.

■

La rappresentazione (ii) del lemma precedente consente di definire l'operatore $f(T)$, dove f è una funzione reale e continua su $[a,b]$ con $a < m_A$ e $b \geq M_A$.
L'operatore $f(T)$ si costruisce come limite di un'opportuna successione di operatori $\{p_n(T)\}_{n\in\mathbb{N}}$, dove $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di polinomi uniformemente convergente a f in $[a,b]$.

Definizione B.5 *Sia $A \in \mathcal{B}(X,X)$ autoaggiunto.*
Allora, fissata una funzione reale f continua su $[a,b]$, dove $a < m_A$ e $b \geq M_A$, l'operatore $f(T) \in \mathcal{B}(X,X)$ è definito da

$$f(T) = \lim_{n\to+\infty} p_n(T)$$

dove $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di polinomi reali uniformemente convergente a f in $[a,b]$.

Si osservi che:

(1) Il limite $f(T)$ esiste sempre.
Infatti, ricordando che lo spazio dei polinomi reali è denso in $C[a,b]$, allora ogni $f \in C[a,b]$ ammette una successione di polinomi $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\|f - p_n\|_{C[a,b]} \longrightarrow 0 \qquad (n \longrightarrow +\infty)$$

Inoltre la successione $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, essendo convergente in $C[a,b]$ completo, è di Cauchy. Considerando il lemma B.3 (iii), segue immediatamente che anche la successione $\{p_n(T)\}$ è di Cauchy in $\mathcal{B}(X,X)$. Poichè $\mathcal{B}(X,X)$ è completo allora necessariamente la successione di Cauchy $\{p_n(T)\}$ converge ad un elemento, detto $f(T)$, interno a $\mathcal{B}(X,X)$.

(2) Il limite non dipende dalla particolare scelta della successione di polinomi convergente a f.
Infatti, se $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un'altra succesione uniformemente convergente a f in $C[a,b]$, allora considerando nuovamente il lemma B.3 (iii), si ottiene

$$\|p_n(T) - q_n(T)\| \leq \|p_n - q_n\|_{C[a,b]} \longrightarrow 0 \qquad (n \longrightarrow +\infty)$$

(3) L'operatore $f(T)$ è autoaggiunto.
Si osservi che ogni operatore $p_n(T)$ è autoaggiunto poichè è combinazione lineare di operatori del tipo A^i, che risultano autoaggiunti. Inoltre l'insieme degli operatori autoaggiunti in $\mathcal{B}(X,X)$ è un sottospazio chiuso, quindi ogni successione convergente di operatori autoaggiunti converge necessariamente ad un operatore autoaggiunto.

Teorema B.2 *Sia $A \in \mathcal{B}(X,X)$ autoaggiunto, $a < m_A$, $b \geq M_A$.*
Allora, considerando le notazioni introdotte nella definizione B.5, si ha

$$f(T) = \int_a^b f(\lambda)\, dE_\lambda$$

Dimostrazione. Sia $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di polinomi convergente a $f \in C[a,b]$.
Allora

$$\left\|\int_a^b (f(\lambda) - p_n(\lambda))\, dE_\lambda\right\| = \sup_{\|x\|=1} \left| \left(\int_a^b (f(\lambda) - p_n(\lambda))\, dE_\lambda x, x \right) \right|$$
$$= \sup_{\|x\|=1} \left| \int_a^b (f(\lambda) - p_n(\lambda))\, d(E_\lambda x, x) \right|$$

Consideriamo nuovamente le somme di Riemann, con $\|x\| = 1$.

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^{n} (f(\hat{\lambda}_i) - p_n(\hat{\lambda}_i)) ((E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}})x \, , \, x) \right| \\ \leq \; & \|f - p_n\|_{C[a,b]} \sum_{i=1}^{n} ((E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}})x \, , \, x) \\ = \; & \|f - p_n\|_{C[a,b]} \longrightarrow 0 \qquad (n \longrightarrow +\infty) \end{aligned}$$

Segue che

$$\begin{aligned} & \|\int_a^b f(\lambda) \, d\, E_\lambda - p_n(T)\| \\ = \; & \|\int_a^b (f(\lambda) - p_n(\lambda)) \, d\, E_\lambda\| \longrightarrow 0 \qquad (n \longrightarrow +\infty) \end{aligned}$$

Si osservi che per definizione di $f(T)$, si ha $\|f(T) - p_n(T)\| \longrightarrow 0$ per $n \longrightarrow +\infty$ quindi, considerando l'ultima relazione, si ottiene necessariamente

$$f(T) = \int_a^b f(\lambda) \, d\, E_\lambda$$

■

Utilizzando il teorema precedente si ha immediatamente il seguente risultato.

Corollario B.1

$$\|f(T)\| \leq \|f\|_{C[a,b]}$$

Nel caso in cui A autoaggiunto sia compatto, la risoluzione dell'operatore si semplifica in una sommatoria. Questo è dovuto alla distribuzione degli autovalori, che sappiamo risulta numerabile.
L'operatore ammette la rappresentazione seguente

$$A = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i P_i$$

dove i λ_i sono gli autovalori dell'operatore ordinati in senso decrescente, con 0 unico punto d'accumulazione, e P_i l'operatore di proiezione di x sul sottospazio $N(A - \lambda_i I)$.

Si osservi che

(i) $\quad |A| = \sum_{i=1}^{+\infty} |\lambda_i| P_i$

(ii) $\quad A^+ = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|\lambda_i| + \lambda_i}{2} P_i$

ossia A^+ è la restrizione dell'operatore A al sottospazio generato dagli autospazi corrispondenti ad autovalori positivi, e analogamente

$$A^- = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|\lambda_i| - \lambda_i}{2} P_i$$

(iii) $\quad E_\lambda = \sum_{\lambda_i \leq \lambda} P_i$

infatti $N(A_\lambda{}^+)$ è lo spazio generato da tutti gli autovalori $\lambda_i \leq \lambda$.
Si osservi che la famiglia $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ è continua a destra rispetto a λ e costante a tratti con discontinuità di seconda specie (salti) in corrispondenza degli autovalori λ_i .

(iv) Il differenziale $d\, E_\lambda$ induce una misura di tipo discreto, che risulta positiva nei punti λ_i e nulla in $[a,b] \backslash \{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$. Con abuso di linguaggio, si ha

$$d\, E_\lambda = \begin{cases} P_i & \lambda = \lambda_i \\ 0 & \lambda \neq \lambda_i \end{cases}$$

Ritorniamo al caso generale in cui $A \in B(X, X)$ è autoaggiunto non necessariamente compatto.
Si consideri la funzione reale $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$h(\lambda) = \|E_\lambda x\|$$

dove $x \in X$ è fissato.
h viene detta **distribuzione spettrale dell'operatore** A e indica in che modo l'elemento x è distribuito nei sottospazi $N(A_\lambda{}^+)$.
h è monotonicamente non decrescente poichè $E_{\lambda_1} \leq E_{\lambda_2}$ per $\lambda_1 \leq \lambda_2$.
Inoltre, nel caso in cui A è compatto , h risulta costante a tratti. Più precisamente, $\forall x \in X$, si ha

$$h(\lambda) = \|E_\lambda x\| = \begin{cases} 0 & a \leq \lambda < 0 \\ \|P_{N(A)} x\| & \lambda = 0 \\ \sum_{i=j}^{+\infty} \|P_j x\| & \lambda_j \leq \lambda < \lambda_{j-1} \\ \|x\| & M_A \leq \lambda \leq b \end{cases}$$

Si osservi che, se h è costante tranne in un numero finito di punti $\{\lambda_j^*\}_{j=1}^{n}$, allora x è combinazione lineare di elementi appartenenti allo spazio

$$\oplus_{j=1}^{n} N(A - \lambda_j^* I)$$

Chiudiamo questa breve introduzione alla risoluzione spettrale, elencando alcune utili relazioni valide nel caso in cui l'operatore autoaggiunto A sia semidefinito positivo.

(i) $E_0 = P_{N(A)}$
infatti $\quad E_0 = P_{N(A_0{}^+)} = P_{N(A^+)} = P_{N(A)}$

(ii) $E_{\lambda_1} = \int_0^{\lambda_1} d\, E_\lambda \qquad \lambda_1 > 0$

(iii) $E_{\lambda_1} f(A) = E_{\lambda_1} \int_0^b f(\lambda) \, d\, E_\lambda = E_{\lambda_1} \int_0^{\lambda_1} f(\lambda) \, d\, E_\lambda = \int_0^{\lambda_1} f(\lambda) \, d\, E_\lambda \qquad b \geq M_A \; , \; \lambda_1 > 0$
infatti proiettare $f(A)$ sul sottospazio $P_{(A_{\lambda_1}{}^+)}$ equivale a considerare le componenti

corrispondenti ad autovalori $\lambda \leq \lambda_1$

(iv) $I - E_s = \int_0^b d\,E_\lambda - \int_0^s d\,E_\lambda = \int_s^b d\,E_\lambda \qquad b \geq M_A \ , \ \ 0 < s \leq b$

(v) $(\,E_\lambda x\,,\, x\,) = (\,E_\lambda x\,,\, E_\lambda x\,) + (\,E_\lambda x\,,\,(I - E_\lambda)x\,) = \|E_\lambda x\|^2$
infatti autospasi corrispondenti a autovalori diversi sono ortogonali

(vi) $\|x\|^2 = \left(\int_0^b d\,E_\lambda\, x\,,\, x\right) = \int_0^b d\,(\,E_\lambda x\,,\, x\,)$
$= \int_0^b d\,\|E_\lambda x\|^2$

(vii) $\|x\|^2 = \|\,[\,E_s + (I - E_s)\,]\,x\,\|^2 \leq \|E_s x\|^2 + \|(I - E_s)x\|^2$
$= \int_0^s d\,\|E_\lambda x\|^2 + \int_s^b d\,\|E_\lambda x\|^2 \qquad b \geq M_A \ , \ \ 0 < s \leq b$

Appendice C

C.1 Differenziale di Fréchet

La nozione di derivabilità sviluppata per funzioni di più variabili in spazi euclidei può essere generalizzata a spazi lineari normati arbitrari per mezzo della definizione proposta da Fréchet.
La derivazione di Fréchet nasce dalla idea che, localmente, il calcolo differenziale di una funzione è la sua approssimazione per mezzo di una funzione lineare.

Definizione C.1 *Siano A e B spazi vettoriali normati e si consideri $D \subset A$ aperto. Un'applicazione $f : D \longrightarrow B$ è detta* **Fréchet-differenziabile** *in $x_0 \in D$ se esiste un operatore lineare e limitato*

$$f'(x_0) \,:\, A \longrightarrow B$$

tale che

$$\lim_{\|h\| \longrightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h\|}{\|h\|} = 0$$

L'operatore $f'(x_0)$ viene detto Fréchet-derivata di f in x_0.

Si osservi che la scrittura $f'(x_0)h$ indica l'immagine di h rispetto a $f'(x_0) \in \mathcal{B}[A, B]$.

Nel caso di funzione di variabile reale monodimensionale, la definizione si caratterizza in accordo all'usuale concetto di derivata prima. In questo caso la Fréchet-derivata $f(x_0)$ è la funzione lineare definita da

$$f'(x_0)x = M(x_0)x \qquad \text{con} \qquad M(x_0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$M(x_0) \in \mathbb{R}$ è la derivata prima di f ossia il coefficiente angolare della retta tangente al grafico nel punto $(\,x_0\,,\, f(x_0)\,)$.
$M(x_0)x$ risulta proprio l'approssimazione lineare di $f(x)$ nel punto x_0.

Lemma C.1 *La Fréchet-derivata è unica.*

Dimostrazione. Supponiamo esistano due operatori L_1, L_2 appartenenti a $\mathcal{B}[A, B]$ che soddisfino la definizione C.1 . Sia inoltre $x \in A$, con $\|x\| = 1$.
Si ha

$$\begin{aligned}
\|L_1x - L_2x\| &= \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{|t|}\|L_1x - L_2x\| \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\|L_1(tx) - L_2(tx)\|}{|t|} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\|L_1(tx) - f(x_0 + tx) + f(x_0) + f(x_0 + tx) - f(x_0) - L_2(tx)\|}{|t|} \\
&\le \lim_{t \to 0} \frac{\|f(x_0 + tx) - f(x_0) - L_1(tx)\|}{|t|} \\
&\quad + \lim_{t \to 0} \frac{\|f(x_0 + tx) - f(x_0) - L_2(tx)\|}{|t|} = 0
\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di $x \in X$ si conclude che $L_1 = L_2$, ossia la Fréchet-derivata è unica. ∎

In base alla definizione C.1 , si dimostra immediatamente che, se f e g sono due applicazioni Fréchet-differenziabili, allora

(i) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(ii) $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$

Inoltre, analogamente all'usuale derivazione in spazi euclidei, si ha il seguente risultato.

Lemma C.2 *Siano A , B , C spazi lineari normati.*
Sia $g : A \longrightarrow B$ Fréchet-differenziabile in $x_0 \in A$ e
$f : B \longrightarrow C$ Fréchet-differenziabile in $g(x_0) \in B$.
Si consideri l'applicazione $l : A \longrightarrow C$ definita da $l(x) = f(g(x)) \quad \forall x \in A$.
Allora l è Fréchet-differenziabile in x_0 e si ha

$$l'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

Per la dimostrazione si consulti [15] .

Nel nostro contesto è di maggior interesse il caso in cui l'applicazione f è un funzionale definito in uno spazio di Hilbert.
Si consideri quindi X spazio di Hilbert e
$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ Fréchet-differenziabile in $x_0 \in x$.
Dal teorema di Riess sappiamo che, poichè $f'(x_0)$ risulta un funzionale lineare limitato, allora esiste un unico vettore in X , che indicheremo con $\nabla f(x_0)$, tale che

$$f'(x_0)h = (h, \nabla f(x_0)) \qquad \forall h \in X \tag{C.1}$$

$\nabla f(x_0)$ viene detto **gradiente di** f **nel punto** x_0 .

Inoltre, per ogni $h \in X$, è possibile associare un numero che misura la "variazione" del funzionale nel punto x_0 nella direzione individuata da h .

Definizione C.2 *Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ e $h \in X$, $h \neq 0$.*
Si definisce **derivata direzionale** *di f in x_0 rispetto alla direzione individuata da h il numero reale $df(x_0, h)$ dato da*

$$df(x_0, h) = \lim_{t \to 0^+} \frac{(\, f(x_0 + th) - f(x_0)\,)}{t}$$

ogniqualvolta tale limite esiste.

Lemma C.3 *Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ è Fréchet-differenziabile in x_0 , allora f ammette derivata direzionale in x_0 rispetto ad ogni direzione e vale la relazione seguente*

$$df(x_0, h) = (\, h, \nabla f(x_0)\,)$$

Dimostrazione. Si consideri $h \in X$. Dalla definizione C.1 , segue che

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \to 0} \frac{\|f(x_0 + th) - f(x_0) - f'(x_0)th\|}{\|th\|} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{|f(x_0 + th) - f(x_0) - f'(x_0)th|}{\|th\|} = 0
\end{aligned}$$

Quindi, considerando la definizione di gradiente di f in x_0 , si ha

$$\begin{aligned}
df(x_0, h) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{(\, f(x_0 + th) - f(x_0)\,)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0^+} \frac{(\, f(x_0 + th) - f(x_0) - f'(x_0)th\,) + f'(x_0)th}{t} \\
&= \lim_{t \to 0^+} \frac{f'(x_0)th}{t} \\
&= f'(x_0)h = (\, h, \nabla f(x_0)\,)
\end{aligned}$$

Osservando che il gradiente esiste poichè f è Fréchet-derivabile in x_0 , si ottiene la tesi. ∎

È interessante notare la forte analogia dell'ultimo lemma con la nozione di gradiente di funzione di variabile reale n-dimensionale. (cfr. [6] teorema 25.20).

Concludiamo questa breve appendice calcolando il gradiente del seguente funzionale quadratico

$$f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - y\|^2$$

dove X, Y sono spazi di Hilbert, $A : X \longrightarrow Y$ è un operatore lineare limitato e $y \in Y$ è da considerarsi fisssato.
Questo funzionale f è di notevole importanza poichè la risolusione della equazione lineare $Ax = y$ può essere ricondotta allo studio dei punti di minimo di f .

Lemma C.4 *Siano X, Y spazi di Hilbert,*
$A : X \longrightarrow Y$ operatore lineare limitato e $y \in Y$.
Si consideri il seguente funzionale quadratico $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - y\|^2$$

Se f è Fréchet-differenziabile in x_0 , allora si ha

$$\nabla f(x_0) = A^* Ax_0 - A^* y$$

Dimostrazione. Considerando la relazione $(C.1)$ la tesi è dimostrata se si verifica che il funzionale $f'(x_0)$ tale che

$$\begin{aligned} f'(x_0)h &= (h, \nabla f(x_0)) \\ &= (h, A^*Ax_0 - A^*y) = (Ah, Ax_0 - y) \qquad \forall\, h \in X \end{aligned}$$

è la Fréchet-derivata di f in x_0, ossia soddisfa alla definizione C.1 .
Si ha

$$\begin{aligned} \|f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h\| &= \left|\frac{1}{2}\|A(x_0+h) - y\|^2 - \frac{1}{2}\|Ax_0 - y\|^2 - (Ah, Ax_0 - y)\right| \\ &= \left|\frac{1}{2}(Ax_0 + Ah - y, Ax_0 + Ah - y) - \frac{1}{2}(Ax_0 - y, Ax_0 - y)\right. \\ &\qquad \left. - (Ah, Ax_0 - y)\right| \\ &= \left|\frac{1}{2}(Ax_0 - y, Ax_0 - y) + (Ah, Ax_0 - y) + \frac{1}{2}(Ah, Ah)\right. \\ &\qquad \left. -\frac{1}{2}(Ax_0 - y, Ax_0 - y) - (Ah, Ax_0 - y)\right| \\ &= \frac{1}{2}|(Ah, Ah)| = \frac{1}{2}\|Ah\|^2 \le \frac{1}{2}\|A\|^2\,\|h\|^2 \end{aligned}$$

Si ottiene così

$$\begin{aligned} \lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h\|}{\|h\|} &= \lim_{\|h\| \to 0} \frac{\frac{1}{2}\|Ah\|}{\|h\|} \\ &\le \lim_{\|h\| \to 0} \frac{\frac{1}{2}\|A\|^2\|h\|^2}{\|h\|} \\ &= \lim_{\|h\| \to 0} \frac{1}{2}\|A\|^2\|h\| = 0 \end{aligned}$$

che conclude la dimostrazione. ∎

Si osservi che se x_0 è punto di minimo, allora ogni derivata direzionale in x_0 risulta nulla. In base al lemma C.3 ciò implica che $\nabla f(x_0) = 0$.
Considerando il lemma appena dimostrato, i punti x_0 di minimo del funzionale si caratterizzano quindi come soluzioni ai minimi quadrati dell'equazione $Tx = y$, infatti soddisfano l'equazione seguente

$$A^*Ax_0 - A^*y = 0$$

(cfr. teorema 1.1 (iii)).

Bibliografia

[1] Arcangeli R.
Pseudo-solution de l'equation $Ax = y$.
C.R. Acad. Sci. Paris, Series A , **263** , No.8 , (1966) , pp. 282–285

[2] Bertero M.
Problemi lineari non ben posti e metodi di regolarizzazione.
Pubblicazioni dell'Istituto di Analisi Globale e Applicazione , Serie " Problemi non ben posti ed inversi " , **No. 4** , C.N.R. , Firenze , (1982)

[3] Beutler F. J.
The operator theory of the pseudo-inverse *I* . Bounded operators.
J. Math. Anal. Appl. , **10** , (1965) , pp.451–470

[4] Beutler F. J.
The operator theory of the pseudo-inverse *II* . Unbounded operators with arbitrary range.
J. Math. Anal. Appl. , **10** , (1965) , pp.471–493

[5] Brakhage H.
On ill-posed problems and the method of conjugate gradients.
In Engl H. W. , Groetsch J. W. (eds.) *Inverse and ill-posed Problems* , pp. 165–175 , Academic Press , Boston , (1986)

[6] Caligaris O. , Oliva P.
Analisi Matematica II
E.C.I.G. , Genova , (1986)

[7] Chan R. H. , Nagy J.G. , Plemmons R.J.
FFT-based preconditioners for Toeplitz-block least squares problems.
SIAM J. Numer. Anal. , **30** , (1993), pp. 1740–1768

[8] Comincioli V.
Analisi numerica: metodi modelli applicazioni .
Mc Graw - Hill , New York , (1990)

[9] Daniel J.
Approximate Minimization of Functionals.
Mc Graw - Hill , New York , (1971)

[10] Deoser A. , Whalen B. H.
A note on pseudoinverses.
SIAM J. , **11** , (1963) , pp. 442–447

[11] Eicke B. , Louis A. K. , Plato R.
The instability of some gradient methods for ill-posed problems.
Num. Math. , **58** , (1990) , pp. 129–134

[12] Greco S. , Valabrega P.
Lezioni di matematica 2 , II
Levrotto & Bella , Torino , (1983)

[13] Groetsch C. W.
Generalized inverses of linear operators : representation and approximation.
Pure and applied mathematics , 37 , Marcell Dekker , New York , (1977)

[14] Groetsch C. W.
The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equations of the first kind.
Research Notes in Mathematics , 105 , Pitman Publishing , (1984)

[15] Groetsch C. W.
Element of applicable functional analysis.
Pure and applied mathematics , 55 , Marcell Dekker , New York , (1980)

[16] Hayes R.
Iterative methods for solving linear problem on Hilbert space.
Nat. Bur. of Stand. Appl. Math. , **39** , (1954) , pp. 71–103

[17] Hanke M.
A second look at Nemirovskii's analysis of the conjugate gradient method.
Eberhard Schck (eds.) , *Beitrage zur angewadten analysis und informatik* , Verlag Shaker (1994) , pp. 123–135

[18] Hestenes M. R. , Stiefel E.
Method of conjugate gradients for solving linear system.
J. Nat. Bur. Stand. , Sec. B , **49** , (1952) , pp. 409–432

[19] Hestenes M. R.
The conjugate gradient method for solving linear system.
Proc. Sixth Symp. Appl. Math. , A.M.S. , Mc Graw - Hill , New York , (1956)

[20] Ivanov V. K.
On estimation of the instability of quasi-solution on noncompact sets.
Iz. Vuz. Mat. , **18** , No. 5 , (1974) , pp. 97–103

[21] Kammerer W. J. , Nashed M. Z.
Steepest descent for singular linear operators with nonclose range.
Appl. Anal. , **1** , (1971) , pp. 143–159

[22] Kammerer W. J. , Nashed M. Z.
On the convergence of the conjugate gradient method for sing. lin. operator equations.
SIAM J. Numer. Anal. , **9** , (1972) , pp. 165–181

[23] Kantorovich L. V.
Functional analysis and applied mathematics.
Nat. Bur. of Stan. Rep. , **1509** , (1952) .

[24] King J. T.
A minimal error conjugate gradient method for ill-posed problem.
J. of Opt. Theory and Appl. , **60** , No. 2 , (1989) , pp. 297–304

[25] Luenberger D. G.
Introduction to linear and nonlinear programming.
Addison-Wesley Publishing Company , (1973)

[26] Louis A. K.
Generalised conjugate gradient methods.
Eberhard Schck (eds.) , *Beitrage zur angewadten analysis und informatik* , Verlag Shaker (1994) , pp. 205–212

[27] Louis A. K.
Convergence of the conjugate gradient method for compact operators.
In Engl H. W. , Groetsch J. W. (eds.) *Inverse and ill-posed Problems* , pp. 165–175 , Academic Press , Boston , (1986)

[28] Mc. Cormick F. , Rodrigue G. H.
A unified approach to gradient methods for linear operator equations.
J. Math. Anal. Appl. , **49** , (1975) , pp. 275–285

[29] Miller K.
Least-quares methods for ill-posed problems with a prescribed bound.
SIAM J. Math. Anal. , **1** , (1970) , pp. 52–74

[30] Monegato G.
Fondamenti di calcolo numerico .
Levrotto & Bella , Torino , (1990)

[31] Moore E. H.
Abstact
Bull. Amer. Math. Soc. , **26** , (1920) , pp. 394–395

[32] Morozov V. A.
The error principle in the solution of operational equations by the regularization method.
USSR Comp. Math. and Math. Phys. , **8** , No.2 , (1968) , pp. 63–87

[33] Nagy J. G. , Plemmons R. J.
Iterative image restoration using FFT-based preconditioners.
In *Proc. Allerton conference* , University of Illinois , Urbana-Champaign , (1993).

[34] Nashed M. Z.
Steepest descent for singular operator equations.
SIAM J. Numer. Anal. , **7** , (1970) , pp. 358-362

[35] Nemirovskii A. S.
The regularisation properties of the adjoint gradient method in ill-posed problems.
USSR Comp. Math. and Math. Phys. , **26** , (1986) , 2 : pp. 7–16

[36] Patterson W. M.
Iterative Methods for the solution of a linear Operator Equation in Hilbert Space - A Survey.
Lecture Notes in Mathematics , 394 , Springer Verlag , (1974)

[37] Penrose R.
A generalised inverse for matrices.
Proc. Cambridge Philos. Soc. , **51** , (1955) , pp. 406–413

[38] Plato R.
Optimal algorithms for lineaar ill-posed problems yields regularization methods.
Num. Funct. Anal. and Optimiz. , **11** , (1990) , pp. 111–118

[39] Reed M. , Simon B.
Methods of modern mathematical phisics . I : Functions
Accademic Press , New York , (1972)

[40] Robbiano L.
Complementi di algebra lineare.
Pubblicazioni del Dipartimento di Matematica , Genova , (1992)

[41] Samanskii V.
Convergence of iterative processes.
Ukrain Math. Z. , **13** , (1961) , pp.113–115

[42] Tikhonov A. N.
Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method.
Soviet Math. Dokl. , **4** , (1963) , pp. 1035–1038

[43] Temple G.
The general theory of relaxation methods applied to linear systems.
Proc. Roy. Soc. Ser. , **A 169** , (1939) , pp. 476–500

[44] Vainikko G. M.
The discrepancy principle for a class of regularization methods.
USSR Comp. Maths. Math. Phys. , **22** , No. 3 , (1982) , pp. 1–19

[45] Vanloan C.
Generalising tha singular value decomposition.
SIAM J. Numer. Anal. , **13** , (1976) , pp. 76–83

[46] Varah J. M.
A pratical examination of some numerical methods for linear discrete ill-posed problems.
SIAM Review , **21** , 1 , (1979) , pp. 100–112

[47] Villani V.
Elementi di topologia ganerale .
Edizioni Tecnico Scientifiche , Pisa , (1975)

[48] Vinokurov V. A.
Two notes on the choiche of regularization parameter.
USSR Comp. Math. and Math. Phys. , **12** , No. 2 , (1972) , pp. 249–253

[49] Votruba G.
Generalized inverses and singular equation in functional analysis.
Doctoral dissertation , Mathematics Departement , The University of Mighigan , (1963)

[50] Wahba G. , Heath , Golub G.
Generalized cross validation as a method for choosing a good ridge parameter.
Tecnometris , **21** , (1979) , pp. 215-223