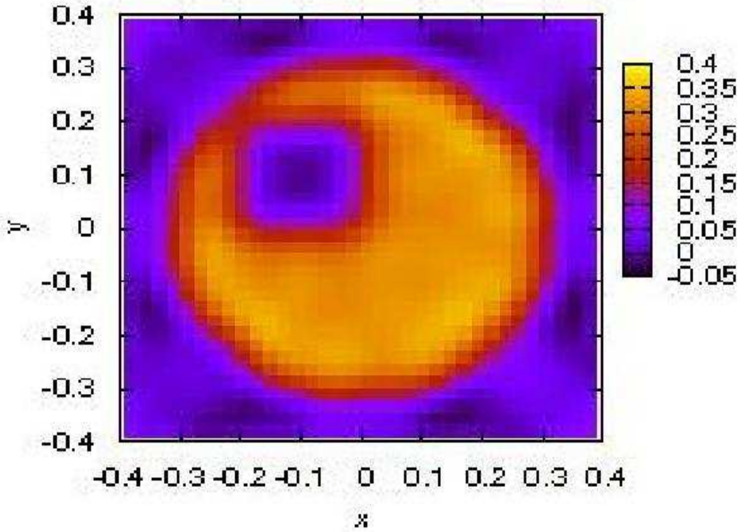


Claudio Estatico

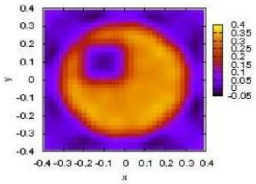
(claudio.estatico@uninsubria.it)

Interpolazione

e

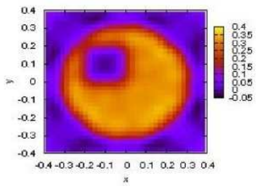
Approssimazione

ai minimi quadrati



Interpolazione e approssimazione ai minimi quadrati

1) **L'approssimazione di funzioni: interpolazione e migliore approssimazione.**
2) **Esistenza e unicità del polinomio interpolatore. Calcolo del polinomio interpolatore.**
3) **Migliore approssimazione mediante polinomi.**
4) **Esistenza e unicità del polinomio ai minimi quadrati. Calcolo del polinomio ai minimi quadrati. Retta e parabola ai min. quad.**



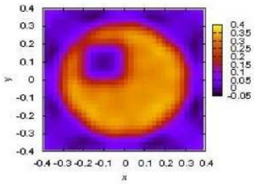
Approssimazione di funzioni

Sia data la tabulazione

$$x_i\,,\ y_i \qquad \text{per} \quad i = 0,1,\ldots,n$$

di una funzione y=f(x), con f:R→R, di cui non si conosce la sua espressione analitica.

L'obiettivo è trovare una "nuova" funzione p(x), p: R→R , dotata di una rappresentazione analitica "semplice", che approssimi la funzione f(x) (in modo tale che p(x) possa essere utilizzata al posto della f(x)).

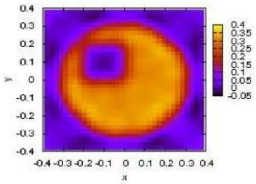


Esempio

Si rileva la temperatura in una stanza ogni secondo nell’arco delle 24 ore. Si hanno quindi a disposizione 3600*24=86400 dati, ovvero le coppie

$$x_i\,,\; y_i \qquad \text{per}\;\; i = 0,1,\ldots,86400$$

in cui la variabile x si riferisce ai secondi, e la y alle corrispondenti temperature.



La conoscenza, in forma analitica, di una funzione p(x) di forma semplice che approssima la funzione vera f(x) a partire dai punti di tabulazione (x_i, y_i), per i=1,…,n, permette un trattamento efficiente del modello matematico che esprime il fenomeno, specie al calcolatore.

Infatti

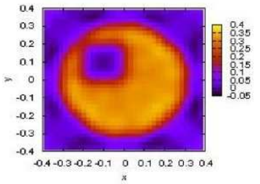
•per memorizzare la funzione basta memorizzare la legge che definisce p(x), generalmente dipendente da meno parametri rispetto a f(x).

•posso approssimare, tramite la p(x), la f(x) anche in qualsiasi altro punto esterno alle ascisse x_i di tabulazione.

Osservazione

Si arriva allo stesso problema quando di una funzione f(x) si conosce la sua espressione analitica ma questa è complicata da calcolare, da derivare o da integrare.

Allora, in tal caso, tramite una tabulazione di f(x) si vuole determinare un "nuova" funzione p(x) dotata di una rappresentazione analitica "semplice" da valutare, da derivare o da integrare, che possa essere utilizzata al posto della f(x).



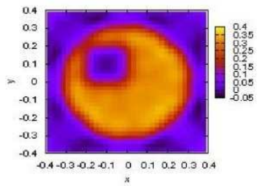
Tecniche per la soluzione del problema

Interpolazione

si cerca quella funzione (in una fissata famiglia di funzioni) che in opportuni punti (detti nodi) assume gli stessi valori della funzione da approssimare.

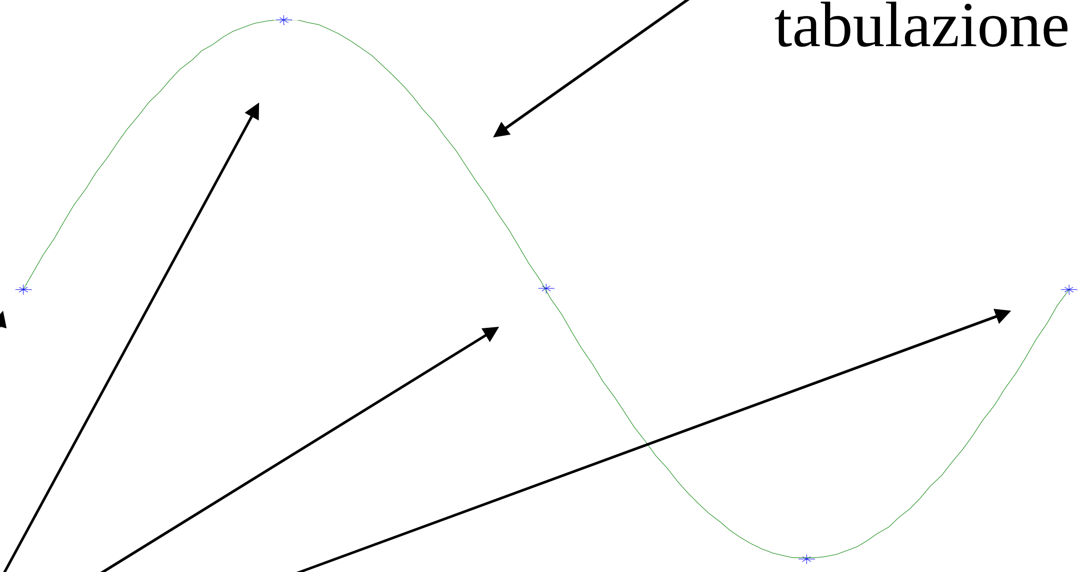
Migliore approssimazione

si cerca quella funzione (in una fissata famiglia di funzioni) la cui "distanza" dalla funzione da approssimare risulta essere minima.

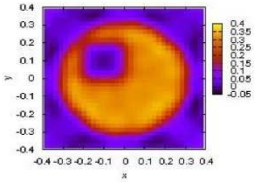


Interpolazione

funzione f(x) da approssimare, conosciuta attraverso una sua tabulazione (x_i, y_i)



Punti (detti nodi di interpolazione) in cui la funzione f(x) e la sua approssimazione p(x) devono coincidere



Interpolazione polinomiale

Si cerca il polinomio p(x)$\in$ P$_n$, dove P$_n$ rappresenta l'insieme dei polinomi di grado $\leq$ n, del tipo

$$p(x) \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 ... + a_n x^n$$

tale che

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,2,...,n$$

Risultato fondamentale: il polinomio p(x), detto polinomio interpolatore, esiste ed è unico.

Esistenza ed unicità del polinomio interpolatore (n=3)

Trova

$$p(x) \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

tale che $p(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,2,\ldots,n$ **, ossia tale che**

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 &= y_0 \\
a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 &= y_1 \\
a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 &= y_2 \\
a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 &= y_3
\end{aligned}$$

Questo è un sistema lineare 4×4 in cui le incognite sono i 4 parametri $a_0, \ldots, a_3$ che definiscono il polinomio.

Il determinante della matrice del sistema è

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix}$$

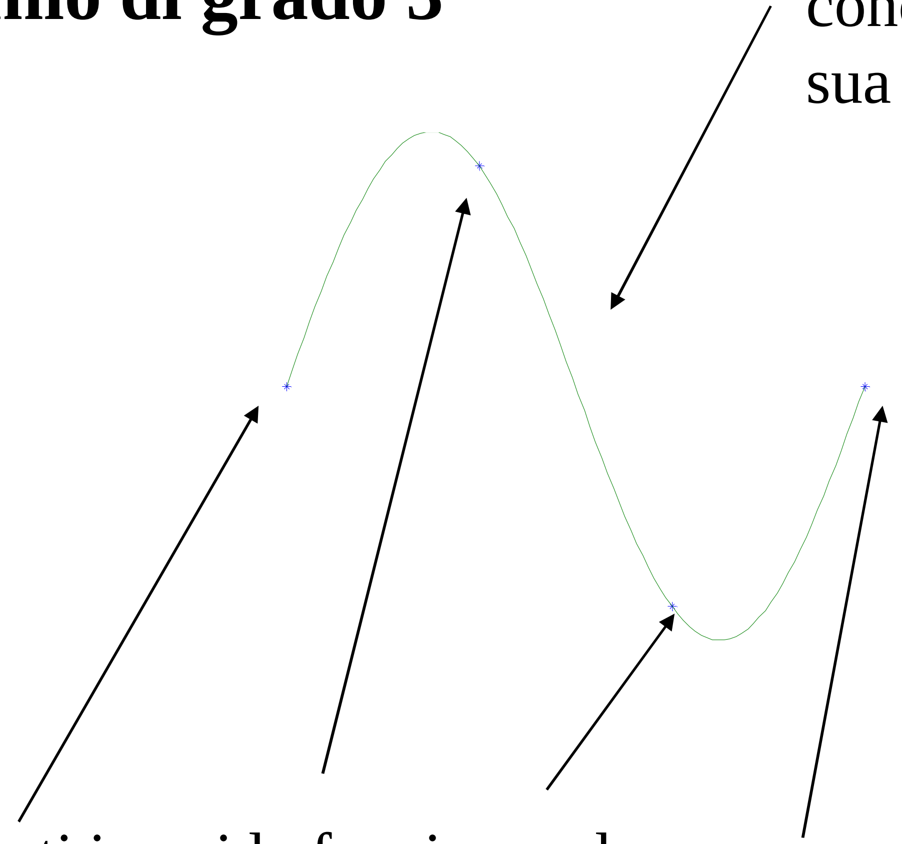
determinante di Vandermonde

il quale è ≠0 nel caso in cui $x_i \neq x_k$ per $i \neq k$ (nodi distinti).

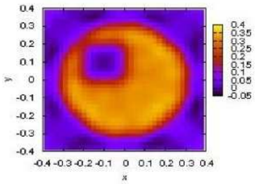
Pertanto la soluzione esiste ed è unica, e quindi il polinomio interpolatore esiste ed è unico.

Approssimazione mediante polinomio di grado 3

funzione f(x) da approssimare,
conosciuta attraverso una
sua tabulazione x_i, y_i , i=0,1,2,3



punti in cui la funzione ed
il polinomio devono coincidere



Esistenza ed unicità del polinomio interp. (caso generale)

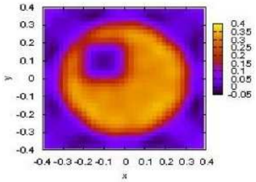
Trova

$$p(x) \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

tale che

$$a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n = y_0$$
$$a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_1^n = y_1$$
$$\ldots.$$
$$a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_n x_n^n = y_n$$

Questo è un sistema lineare (n+1)×(n+1) in cui le incognite sono gli n+1 parametri a_0, …, a_n



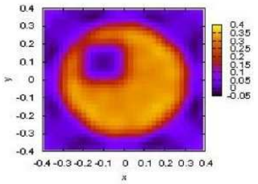
Il determinante della matrice del sistema è

determinante di Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} \left(x_j - x_i \right)$$

il quale è $\neq 0$ nel caso in cui $x_i, \neq x_k$ per $i \neq k$ (nodi distinti).

Pertanto la soluzione esiste ed è unica, e quindi il polinomio interpolatore esiste ed è unico. Possiamo riassumere il risultato tramite il teorema seguente:



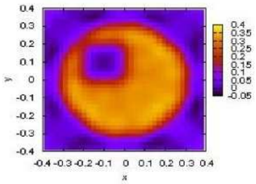
Teorema (esistenza e unicità)

Dati gli n+1 punti, detti nodi di interpolazione,

$$(x_i\,,\ y_i\,),\quad \text{per}\quad i = 0,1,2\,,...,n,\qquad x_i \neq x_k \ \text{ se } i \neq k,$$

esiste ed è unico il polinomio interpolatore p$\in$P$_n$, ossia il polinomio p$\in$P$_n$ tale che

$$p(x_i\,) = y_i\,,\quad i = 0,1,2,...,n$$

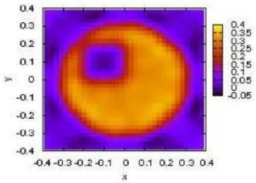


Osservazione

Sulla base di quanto visto, per trovare il polinomio interpolatore su n+1 nodi è sufficiente risolvere un sistema lineare in n+1 incognite.

La soluzione del sistema ci fornisce i coefficienti del polinomio.

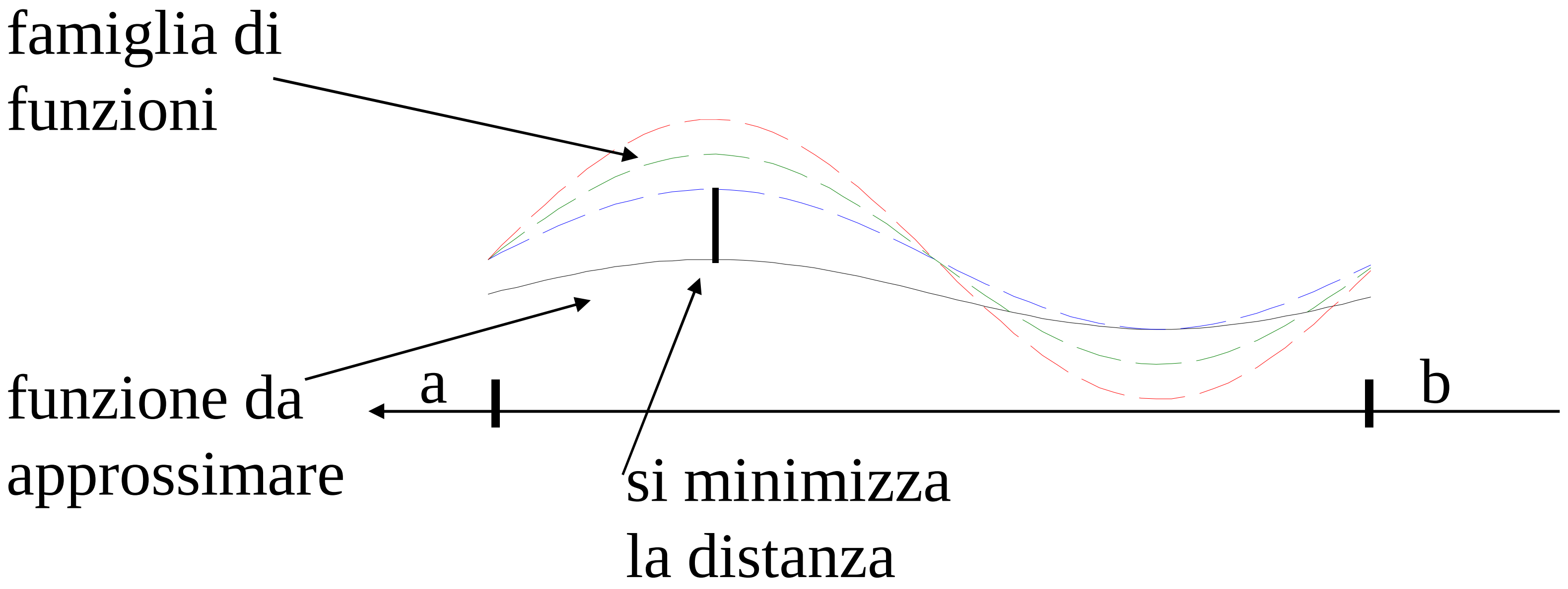
Esistono tuttavia delle formule che danno in modo diretto il polinomio interpolante, senza la necessità di risolvere il sistema di Vandermonde.

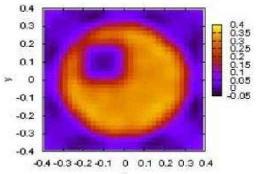


Polinomio ai minimi quadrati

Si cerca quel particolare polinomio di grado n la cui “distanza” dai punti della tabulazione è minima.

Questo problema rientra in una classe più ampia di problemi, detta “migliore approssimazione”





Consideriamo una tabulazione $\{f(x_0), f(x_1),,\ldots, f(x_m)\}$ sull'insieme degli m+1 nodi $\{x_0, x_1,\ldots, x_m\}$ in [a,b].

L'obiettivo è determinare un polinomio $p(x)\in P_n$, dove P_n rappresenta l'insieme dei polinomi di grado $\leq$ n, del tipo

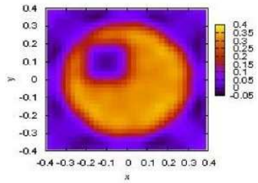
$$p_n(x) \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

tale che la distanza

$$\left(\sum_{i=1}^{m} (p_n(x_i) - f(x_i))^2 \right)^{1/2}$$

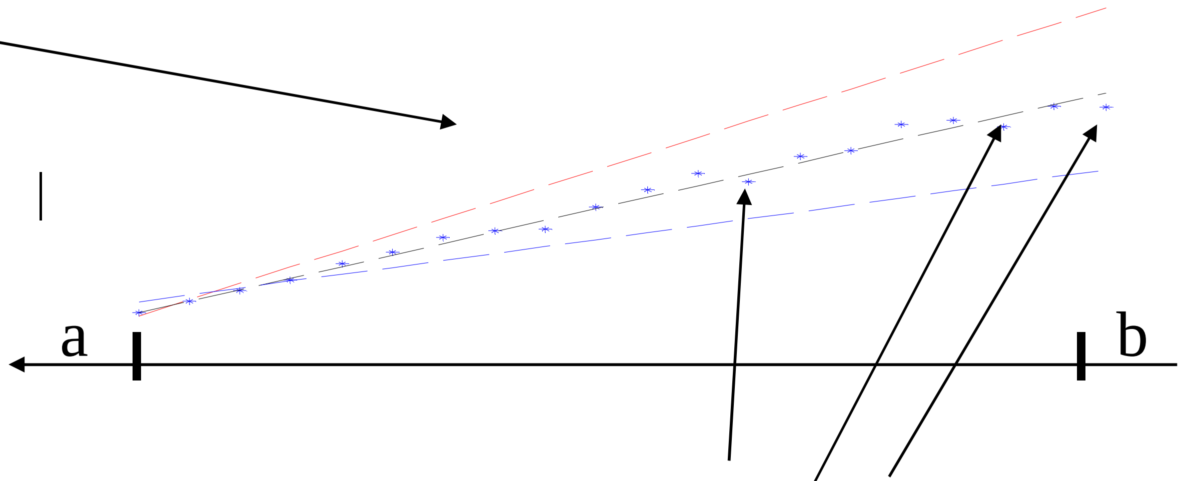
sia minima tra tutti i polinomi di grado $\leq$ n.

Si osservi che si sommano i quadrati delle distanze in ogni punto, da cui il nome "ai minimi quadrati".



Nel caso $P_1(x)=a+bx$, ossia si cerca la retta ai minimi quadtati nell'insieme di tutte le rette, graficamente si ha

famiglia di rette:
$p(x)=a+bx$

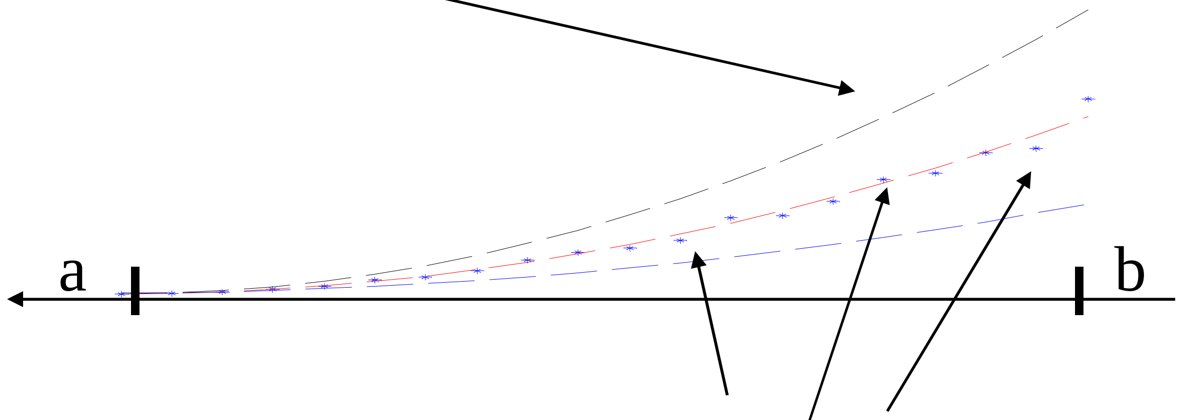


Si determinano i parametri a,b che minimizzano la distanza:
$\min g(a,b)=[\sum_i (f(x_i)-(a+bx_i))^2]^{1/2}$

funzione f(x) da approssimare nota attraverso una sua tabulazione $f(x_i)$

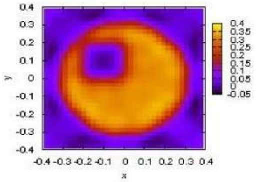
Nel caso $P_2(x)=a+bx+cx^2$, ossia si cerca la retta ai minimi quadtati nell'insieme di tutte le rette, graficamente si ha

famiglia di parabole:
$p(x)=a+bx+cx^2$



Si determinano i parametri a,b,c che minimizzano la distanza:
$\min g(a,b,c)=[\sum_i (f(x_i)-(a+bx_i+cx_i^2))^2]^{1/2}$

funzione f(x) da approssimare nota attraverso una sua tabulazione $f(x_i)$



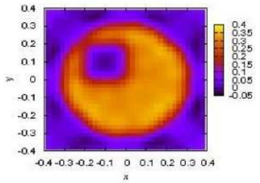
Esistenza e unicità del polinomio ai minimi quadrati

Consideriamo una tabulazione $\{f(x_0), f(x_1),,\dots, f(x_m)\}$ sull'insieme degli m+1 nodi $\{x_0, x_1,\dots, x_m\}$ in [a,b].

Sia m>=n.

Allora il polinomio $p(x) \in P_n$, dove P_n rappresenta l'insieme dei polinomi di grado $\leq$ n, che approssima i valori della tabulazione ai minimi quadrati

esiste ed è unico.



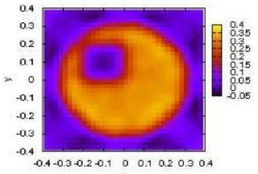
Costruzione del polinomio ai minimi quadrati

Il polinomio ai minimi quadrati si può facilmente determinare risolvendo un sistema lineare associato.

In particolare, data la tabulazione {f(x_0), f(x_1),,…, f(x_m)} sull'insieme degli m+1 nodi {x_0, x_1,…, x_m}, il polinomio p(x)$\in$ P_n del tipo $p(x) \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 ... + a_n x^n$ **si ottiene risoilvendo il sistema lineare <u>quadrato</u> (n+1)*(n+1) seguente**

$$V^t V a = V^t y$$

dove V **è la matrice <u>rettangolare</u> (m+1)*(n+1) di Vander-monde contenenti i valori** $V_{i,j} = x_{i-1}^{j-1}$ **, ed y è il vettore colonna di m+1 elementi contenente i valori y_i=f(x_i) per i=0,1,…,m.**



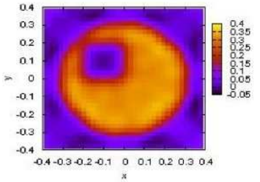
Riassumendo, dal sistema lineare $V^t V a = V^t y$

con

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^n \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

si ottiene così il vettore $a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ **contenente i coefficienti del polinomio di migliore approssimazione**

$$p_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

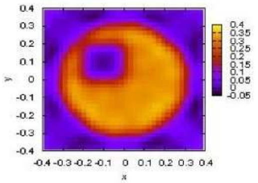


Poiché la matrice V^tV è non singolare per ogni n,m>0, si ottiene che il polinomio ai minimi quadrati esiste ed unico. Questo giustifica l'esisitenza e unicità già osservata.

Vediamo un paio di esempi:

- **caso n=1: Retta ai minimi quadrati (detta anche retta di regressione lineare);**

- **caso n=2: Parabola ai minimi quadrati.**

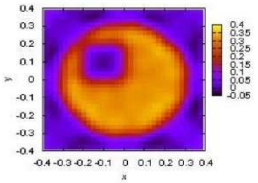


Retta ai minimi quadrati (n=1)

La matrice del sistema lineare $V^tVa = V^t y$ **diviene quindi**

$$V^tV = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} \\ s_{1,2} & s_{2,2} \end{pmatrix}$$

ed il termine noto $V^t y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$



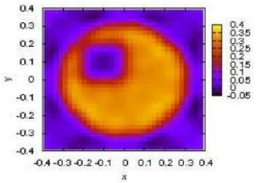
ossia il sistema quadrato 2X2 $Sa = c$ **del tipo**

$$\begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} \\ s_{1,2} & s_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

che, una volta risolto, consente di determinare i due coefficienti a_1 a_0 **della retta**

$$p_1(x) = a_1 x + a_0$$

che risulta essere la retta ai minimi quadrati, o retta di regressione lineare.

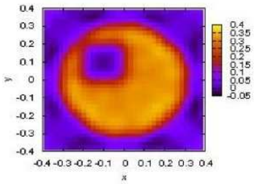


Parabola ai minimi quadrati (n=2)

La matrice del sistema lineare $V^tVa = V^ty$ **diviene quindi**

$$V^tV = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_m^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & s_{1,3} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & s_{2,3} \\ s_{3,1} & s_{3,2} & s_{3,3} \end{pmatrix}$$

ed il termine noto $V^ty = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_m^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$



ossia il sistema quadrato 3X3 $Sa = c$ **del tipo**

$$\begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & s_{1,3} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & s_{2,3} \\ s_{3,1} & s_{3,2} & s_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

che, una volta risolto, consente di determinare i tre coefficienti $a_2 \quad a_1 \quad a_0$ **della parabola**

$$p_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

che risulta essere la parabola ai minimi quadrati.