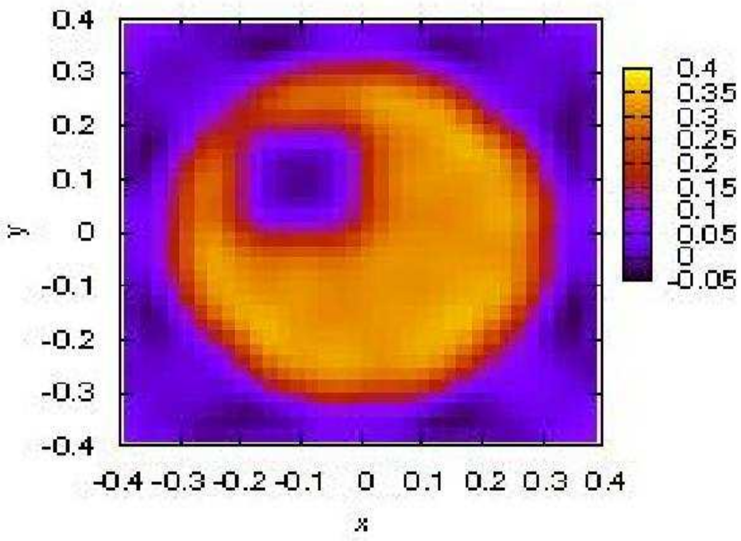
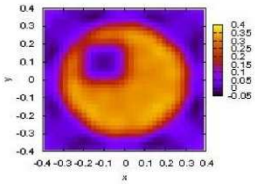


Claudio Estatico

(claudio.estatico@uninsubria.it)

Integrazione numerica



Integrazione numerica

1) **Formule di quadratura.**
2) **Grado di esattezza.**
3) **Metodo dei coefficienti indeterminati.**
4) **Formule di Newton-Cotes semplici. Formule di Newton-Cotes composite.**
5) **Errore delle Formule di Newton-Cotes.**

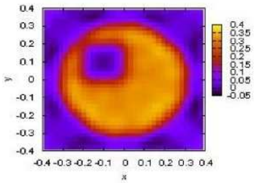
Integrazione numerica

Considieriamo il problema di calcolare l'integrale definito

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

di una funzione f:[a,b]→R.

Le formule di quadratura sono formule che consentono il calcolo (approssimato) di integrali definiti. Queste sono particolarmente utili per il calcolo tramite elaboratore.



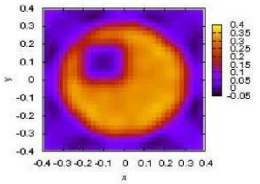
L'approssimazione dell'integrale definito

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

viene fatta per mezzo di una formula di quadratura del tipo

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j f(x_j)$$

che rappresenta una media pesata degli n+1 valori assunti dalla funzione f nei punti, detti nodi, $x_0, x_1, \ldots, x_n$, con pesi fissati $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.



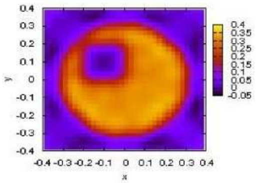
Fissato n, intendiamo quindi approssimare il valore esatto I(f) con I_n(f). Al variare dai pesi e dei nodi si ottengono differenti formule di quadratura.

Diremo che una formula di quadratura ha grado di esattezza (GdE, o precisione algebrica) r>=0 se I_n(p)=I(p) per ogni polinomio p di grado (al più) r.

Poichè ogni formula di quadratura ha almeno grado di esattezza 0, considerando il polinomio p_0(x)=1, otteniamo innanzitutto che

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j = b - a$$

infatti $I_n(p_0) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j 1 = I(p_0) = b - a$

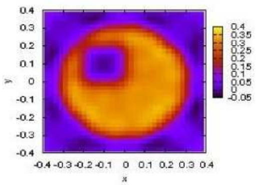


Metodo dei coefficienti indeterminati

Per costruire una formula di quadratura, fissati arbitrariamente n+1 nodi distinti $x_0,x_1,\ldots,x_n$, si possono determinare i pesi $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ in modo che la formula abbia grado di esattezza n.

Infatti, grazie alla linearità dell'integrale, è sufficiente imporre la condizione di esattezza sui polinomi della base canonica

$$I_n(x^i) = I(x^i) \quad i = 0,1,\ldots,n$$



Poichè l'integrale esatto $I(x^i) \quad i = 0,1,\ldots,n$ **si calcola facilmente per via analitica, infatti**

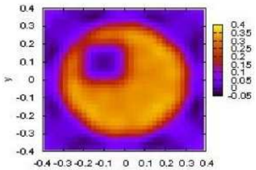
$$I(x^i) = \int_a^b x^i dx = \frac{b^{i+1} - a^{i+1}}{i+1} \qquad i = 0,1,\ldots,n \ ,$$

imponendo l'esattezza della formula di quadratura fino al grado n otteniamo

$$\sum_{j=0}^{n} x_j^i \alpha_j = \frac{b^{i+1} - a^{i+1}}{i+1} \qquad i = 0,1,\ldots,n$$

ossia il sistema lineare $$V^t \alpha = c$$

con V matrice (n+1)*(n+1) di Vandermonde $V_{i,j} = x_{i-1}^{j-1}$ **(non singolare) e c vettore dei termini noti.**



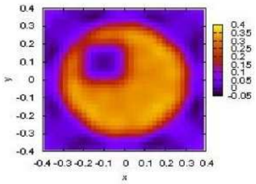
Riassumendo, dal sistema lineare $V^t \alpha = c$

con

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \text{con } c_i = \frac{b^{i+1} - a^{i+1}}{i+1}$$

si ottiene il vettore $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}^t$ **contenente i coefficienti della formula di quadratura**

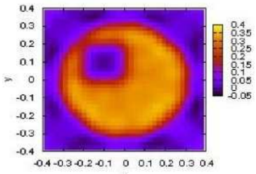
$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j f(x_j)$$



Il metodo dei coefficienti indeterminati consente, in generale, di ottenere i pesi che conducono a precisione algebrica n per ogni scelta arbitraria degli n+1 nodi $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Tale metodo non è però conveniente dal punto di vista computazionale poiché molto costoso ed instabile.

Risulta invece molto utile considerare nodi equispaziati, in modo da semplificare il calcolaro dei coefficienti della formula di quadratura. Tali coefficienti possono essere così calcolati preliminarmente, "una volta per tutte".



Formule di Newton-Cotes (semplici)

Sono formule di quadratura sull'intervallo [a,b] costruite su nodi equispaziati di passo h

$$x_j = x_0 + jh, \qquad j = 0,\dots,n$$

Fissato h, in tali formule i pesi α_j dipendono solo da n.

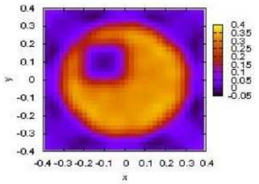
Le formule si dividono in:

- **Chiuse se gli estremi a e b sono inclusi tra i nodi**

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad h = (b-a)/n$$

- **Aperte se gli estremi a e b non sono inclusi tra i nodi**

$$x_0 = a + h, \quad x_n = b - h, \quad h = (b-a)/(n+2)$$



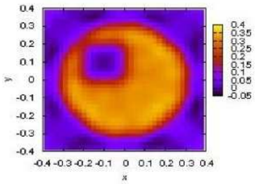
Tramite il cambio di variabile $x = x_0 + ht$ **si ottiene**

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = h\int_0^n f(x_0 + ht)dt$$

che conduce alla formula di quadratura seguente

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j f(x_j) = h\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j)$$

con w_j **valori fissi, calcolati una volta per tutte, dipendenti solo dal tipo di formula (ossia se aperta o chiusa, e dal numero di punti n).**



Si ottengono così semplici tabelle contenenti i pesi al variare del grado n.

Si osservi che:

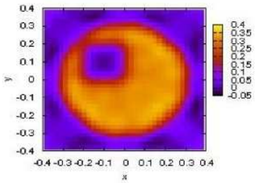
i) se la formula è chiusa, allora

$$\sum_{j=0}^{n} w_j = n$$

i) se la formula è aperta, allora

$$\sum_{j=0}^{n} w_j = n+2$$

Vediamo alcuni esempi.



Si ottengono così semplici tabelle contenenti i pesi al variare del grado n.

Vediamo alcuni esempi.

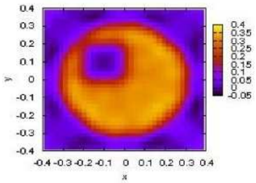
Formula dei rettangoli (n=0, aperta, GdE=1)

è la formula aperta ottenuta per n=0. è anche detta formula del punto medio. Si ha

$$w_0 = 2$$

da cui

$$I_0(f) = 2h\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$



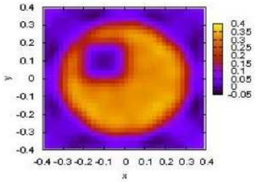
Formula dei trapezi (n=1, chiusa, GdE=1)

è la formula chiusa ottenuta per n=1. Si ha

$$w_0 = 1/2 \qquad\qquad w_1 = 1/2$$

da cui

$$I_1(f) = \frac{h}{2}[f(a) + f(b)] = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$



Formula di Cavalieri-Simpson (n=2, chiusa, GdE=3)

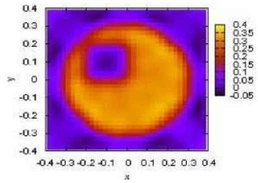
è la formula chiusa ottenuta per n=2. Si ha

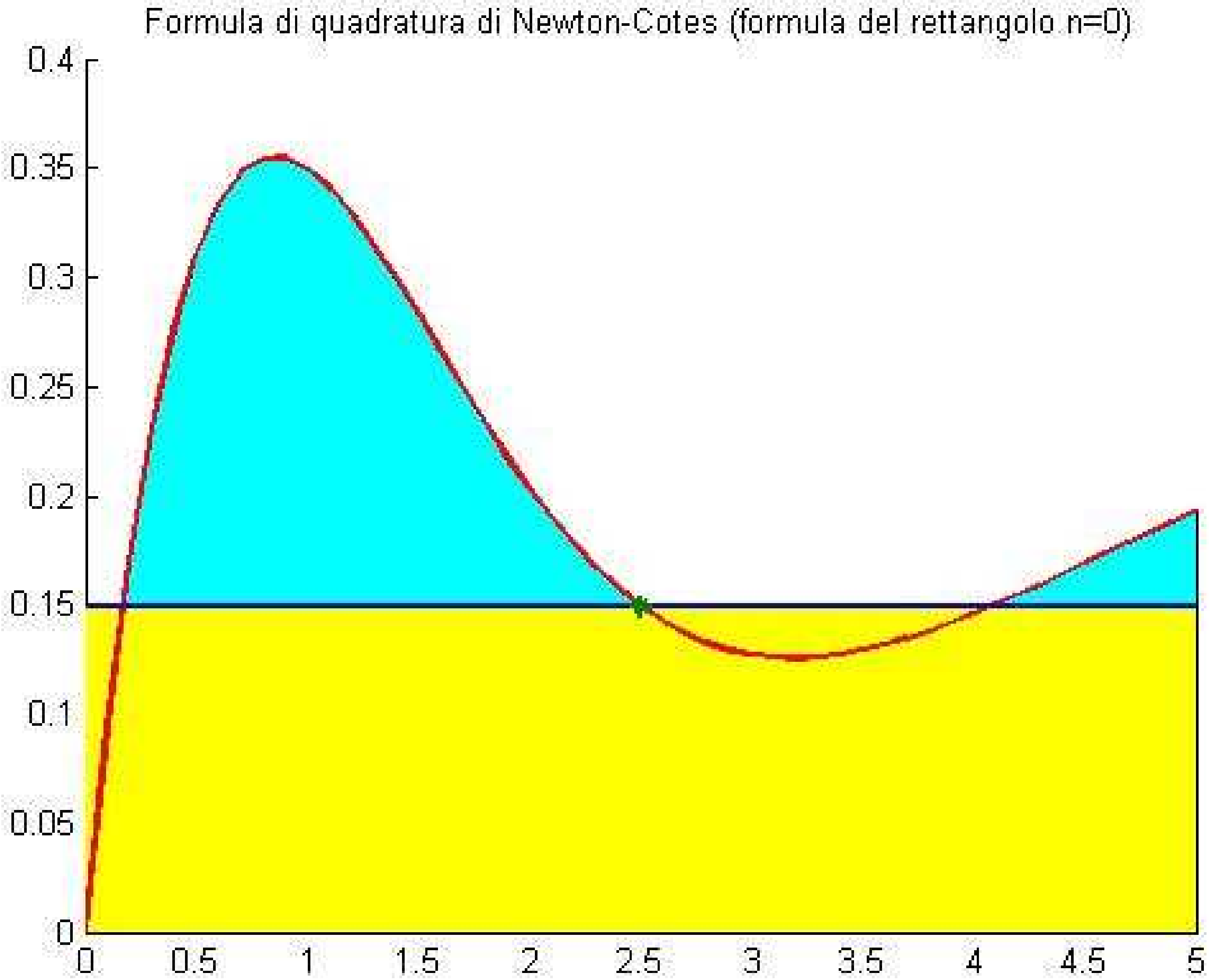
$$w_0 = 1/3 \qquad w_1 = 4/3 \qquad w_2 = 1/3$$

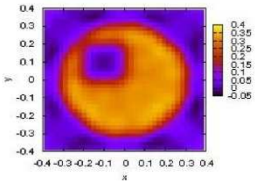
da cui

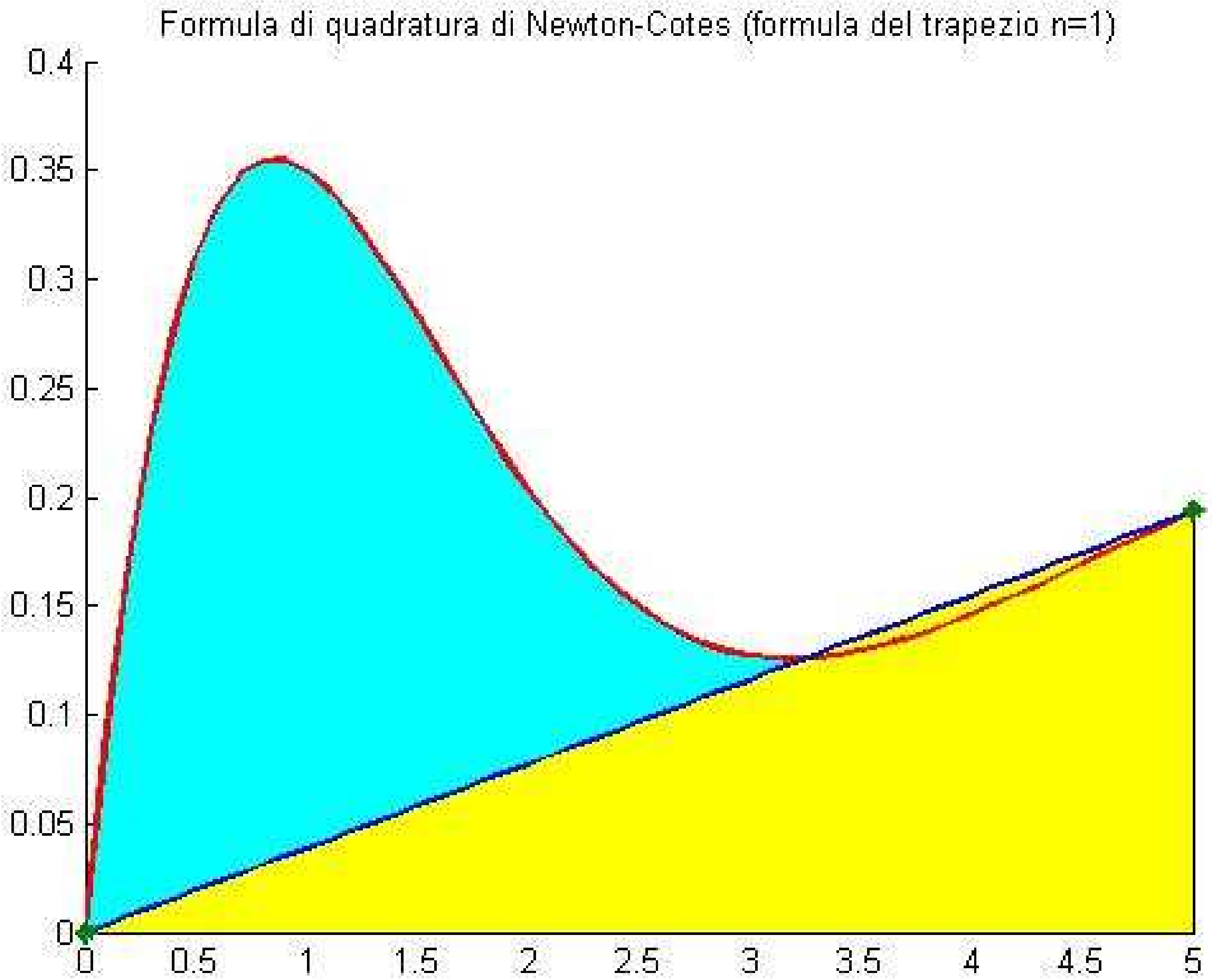
$$I_2(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

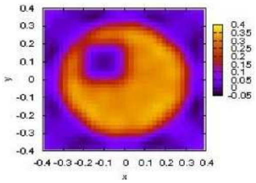
Ovviamente si potrebbe aumentare il valore di n……

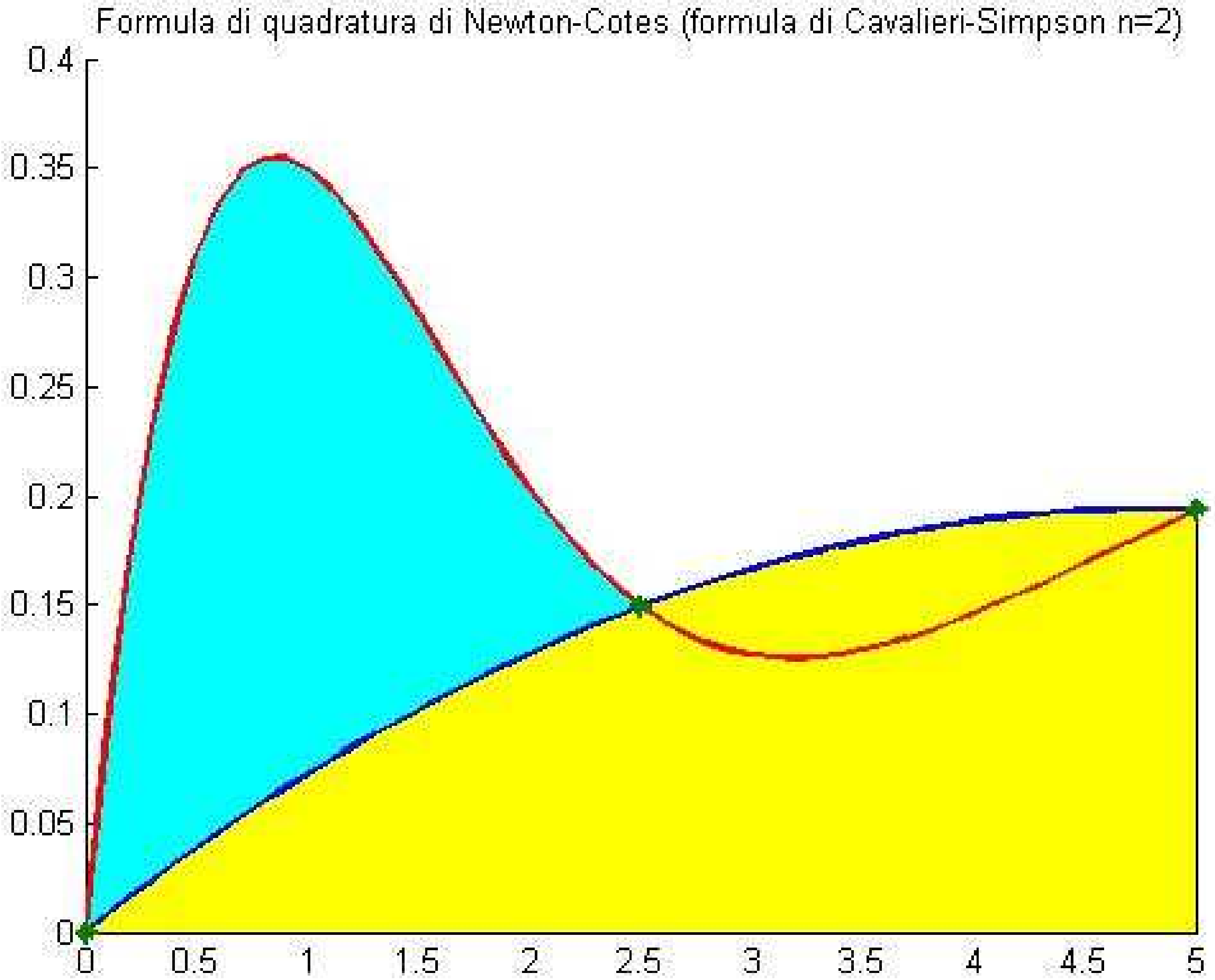


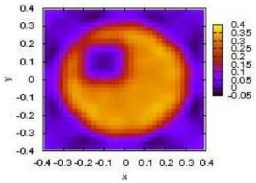

Formula di quadratura di Newton-Cotes (formula del rettangolo n=0)
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5



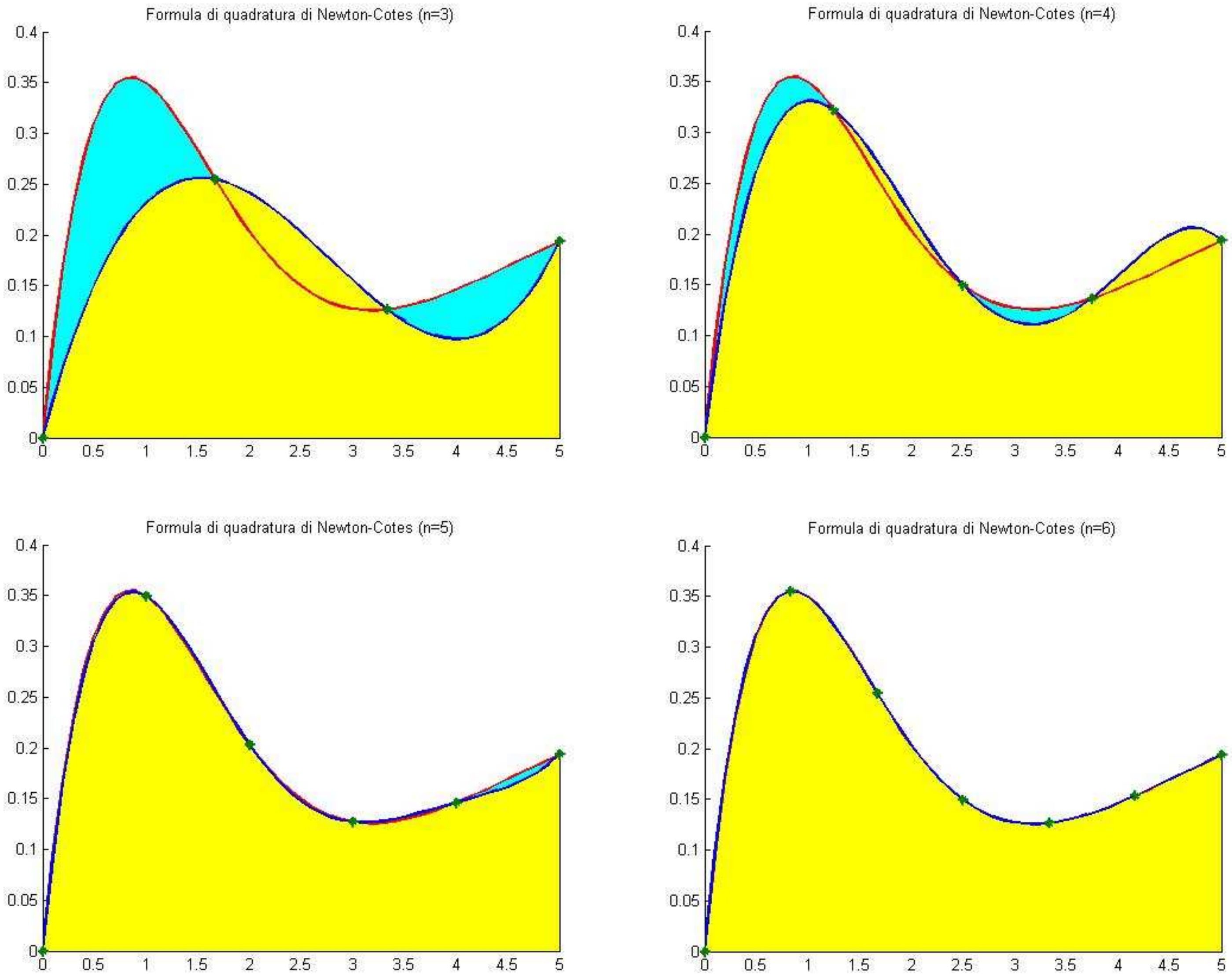

Formula di quadratura di Newton-Cotes (formula del trapezio n=1)
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

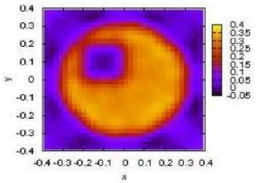



Formula di quadratura di Newton-Cotes (formula di Cavalieri-Simpson n=2)
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5



Integrazione Numerica

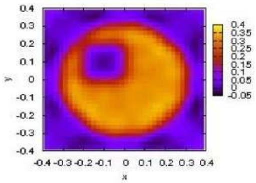




Osservazioni:

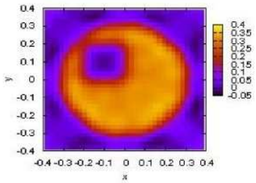
i) **I pesi delle formule di quadrature di Newton Cotes sono simmetrici rispetto al centro, ossia $\alpha_0=\alpha_n$, $\alpha_1=\alpha_{n-1}$, $\alpha_2=\alpha_{n-2}$,…**

ii) **Poichè i pesi sono simmetrici, ogni formula di Newton-Cotes è esatta su ogni funzione dispari integrata su un dominio simmetrico, ossia [-a,a] (si osservi che in tal caso l'integrale definito è sempre uguale a 0). Quindi ogni formula di Newton-Cotes è esatta su ogni polinomio di grado dispari. Ne consegue che le formule di grado pari hanno grado di esattezza n+1 (il primo dispari successivo all'n pari).**



Nella pratica, non si utilizzano formule di Newton-Cotes di grado elevato nella forma precedente, detta semplice.

Questo poiché l'utilizzo di formule di grado elevato in aritmetica finita risulta essere numericamente instabile (per n>6, i pesi α_0, α_1, …, α_n non risultano più essere tutti di segno positivo, e questo crea problemi nel calcolo tramite elaboratore…).



Formule di Newton-Cotes composite

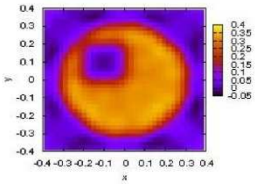
Consideriamo una discretizzazione di n+1 punti equispaziati su [a,b] di passo h=(b-a)/n

$$x_i = x_0 + ih, \qquad i = 0,\ldots,n$$

Per l'additività dell'integrale si ha

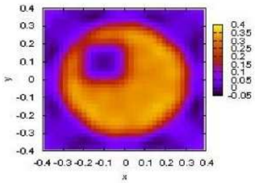
$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

Per approssimare I(f) possiamo quindi sommare (opportune approssimazioni de)gli n integrali sui domini di ampiezza minore.



Sfruttando la proprietà additiva dell'integrale rispetto al dominio di integrazione, si suddivide l'intervallo [a,b] in sottointervalli contigui ed equispaziati e si utilizza su ciascun sottointervallo una formula di Newton-Cotes nella forma semplice. Infatti, poiché l'ampiezza h del dominio di integrazione di ogni integrale può essere resa sufficientemente piccola, una formula di Newton-Cotes di grado basso risulta già sufficientemente accurata. In tal modo si ottengono formule di quadratura molto precise e numericamente stabili.

Tali formule vengono dette formule di Newton-Cotes composite.



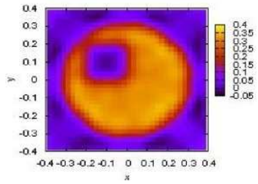
Formula dei rettangoli composita

Considerando la formula dei rettangoli semplice su ciascuno degli n sottointervalli $[x_{i-1},x_i]$, i=1,…,n

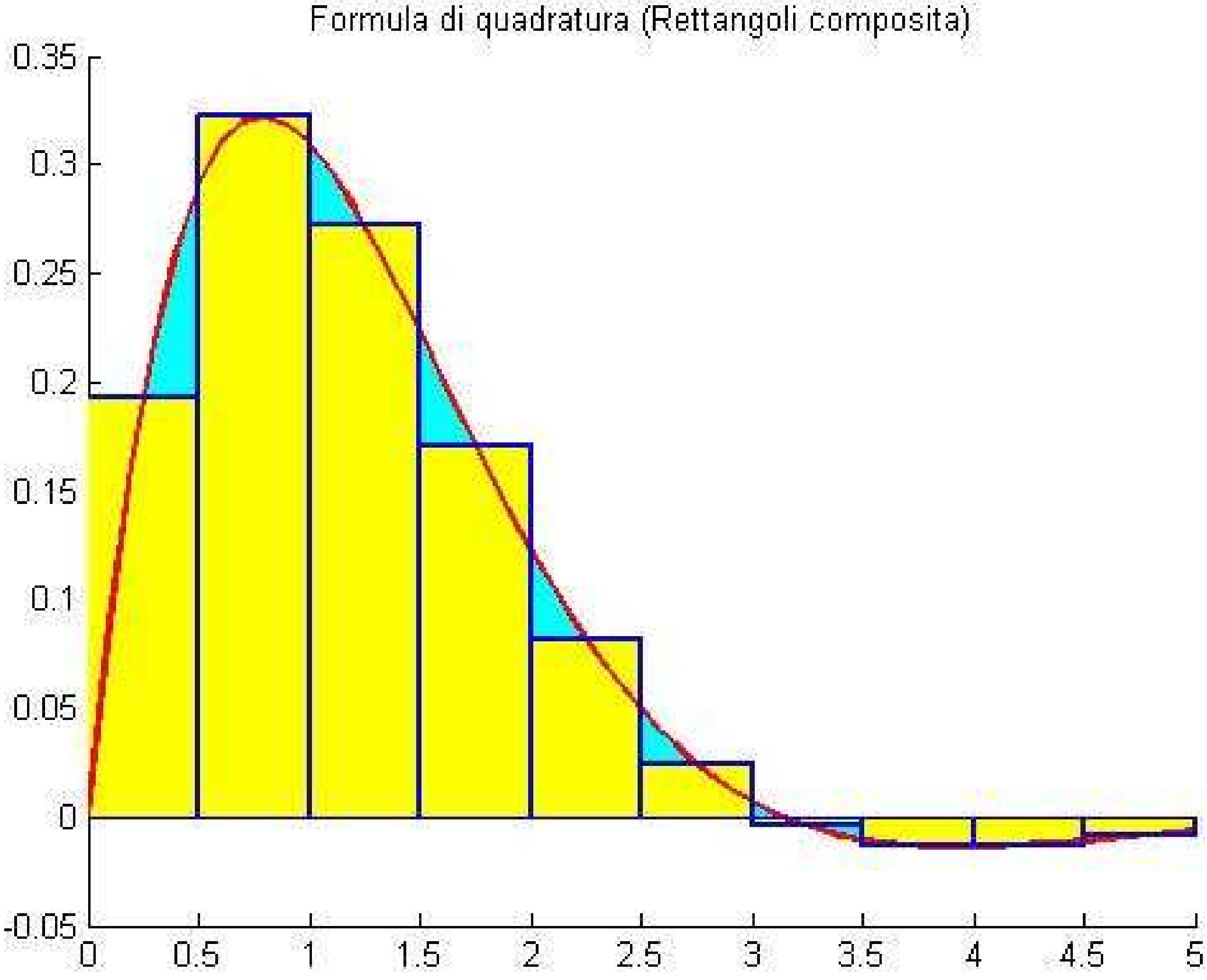
$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = (x_i - x_{i-1})\, f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$$

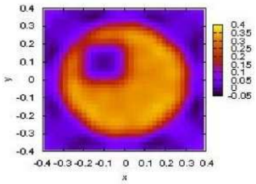
si ottiene la formula dei rettangoli composita

$$I_0^{(C)}(f) = h\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$$



Integrazione Numerica





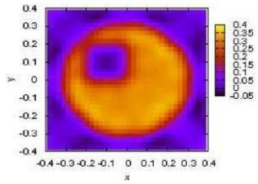
Formula dei trapezi composita

Considerando la formula dei trapezi semplice su ciascuno degli n sottointervalli $[x_{i-1},x_i]$, i=1,…,n

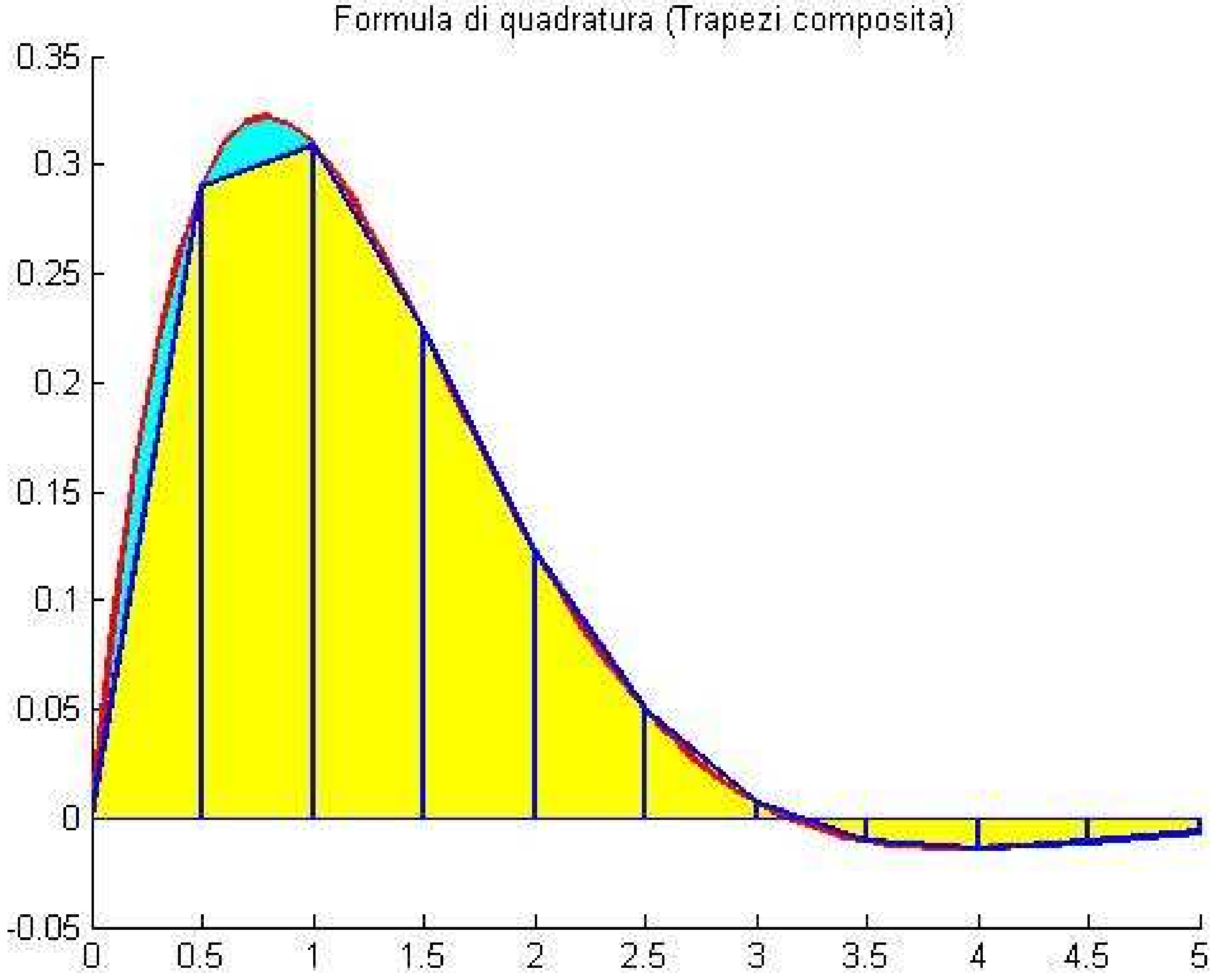
$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{x_i - x_{i-1}}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

si ottiene la formula dei trapezi composita

$$I_1^{(C)}(f) = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right]$$



Integrazione Numerica



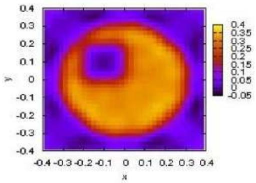
Formula di Simpson composita

Considerando la formula di Cavalieri-Simpson semplice su ciascuno degli n/2 sottointervalli $[x_{2i-2},x_{2i}]$, i=1,…,n/2

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx = \frac{x_{2i}-x_{2i-2}}{6}\left[f(x_{2i-2})+4f(x_{2i-1})+f(x_{2i})\right]$$

per n pari si ottiene la formula di Simpson composita

$$I_2^{(C)}(f)=\frac{h}{3}\left[f(a)+4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1})+2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i})+f(b)\right]$$

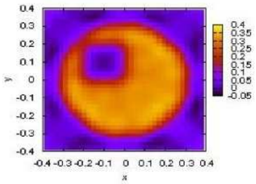


Errore nelle formule di Newton-Cotes

Consideriamo l'errore che si commette approssimando l'integrale mediante la formula di quadratura

$$E_n(f) = I(f) - I_n(f)$$

Svolgendo opportuni calcoli, per le formule di Newton-Cotes dei rettangoli e di Simpson, semplici e composite, posto $M_n=\max_{x\in [a,b]}|f^{(n)}(x)|$, si ottiene la tabella seguente, che permette di stimare l'errore massimo $|E_n(f)|$ commesso



- Formule semplici — Formule composite

Rettangoli
$$\left|E_0(f)\right| \le \frac{M_2}{24}(b-a)^3 \qquad \left|E_0^{(C)}(f)\right| \le \frac{M_2}{24}(b-a)h^2$$

Trapezi
$$\left|E_1(f)\right| \le \frac{M_2}{12}(b-a)^3 \qquad \left|E_1^{(C)}(f)\right| \le \frac{M_2}{12}(b-a)h^2$$

Simpson
$$\left|E_2(f)\right| \le \frac{M_4}{90}((b-a)/2)^5 \qquad \left|E_2^{(C)}(f)\right| \le \frac{M_4}{180}(b-a)h^4$$

Esempio: numero di nodi con f.d.q. di Simpson composita

Sia $f(x)=e^x$. In tal caso $M_n=\max_{x\in[a,b]}|f^{(n)}(x)|= e^b$ per ogni n.

Si eottiene che l'errore commesso dalla formula di quadratura di Simpson composita è maggiorato da

$$\left|E_2^{(C)}(f)\right| \le \frac{e^b}{180}(b-a)h^4$$

In questo caso, se vogliamo un errore minore di $\tau=10^{-6}$, integrando su [a,b]=[0,3], occorre utilizzare n+1 nodi con

$$\frac{e^b}{180}(b-a)\left(\frac{(b-a)}{n}\right)^4 < \tau \quad \text{ossia} \quad n > \sqrt[4]{\frac{10^6 e^3}{180}3^5} \approx 72.1$$