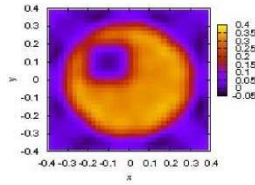


Claudio Estatico
(claudio.estatico@uninsubria.it)

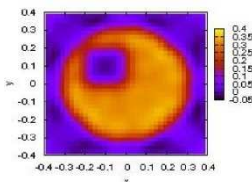
Equazioni non-lineari



Equazioni non-lineari

Equazioni non-lineari

- 1) **Equazioni non-lineari e metodi iterativi.**
- 2) **Metodo di bisezione, metodo regula-falsi.**
- 3) **Metodo di Newton.**
- 4) **Metodi quasi Newton: metodo delle corde, metodo delle secanti.**
- 5) **Convergenza dei metodi bisezione e Newton**



Equazioni non-lineari

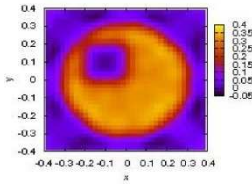
Equazioni non-lineari

Consideriamo il problema di risolvere un'equazione del tipo

$$f(x) = 0$$

ossia determinare un valore reale x (detto radice) che annulla l'espressione $f(x)$, dove f è una generica funzione reale.

In generale non esistono formule analitiche che permettono di ottenere in modo esplicito la soluzione esatta x (...anche nel semplice caso in cui f sia un polinomio di grado > 4).



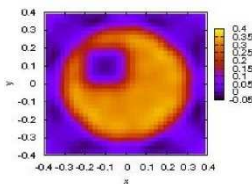
Equazioni non-lineari

Esempi di equazioni non lineari sono i seguenti:

- $\sin x - \log x = 0$
- $\exp x + x = 10$

In maniera analoga si possono considerare sistemi di equazioni non lineari. Ovviamente, anche per tali sistemi non esiste una formula risolutiva di tipo generale, ossia un metodo diretto che consenta di ottenere la soluzione esatta in un numero finito di passi.

Per risolvere tali equazioni (o sistemi di equazioni) non lineari si utilizzano quindi opportuni metodi iterativi.⁴



Equazioni non-lineari

Metodi iterativi

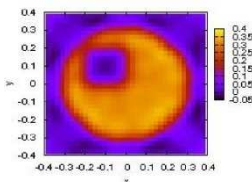
Considerato un punto iniziale x_0 , un metodo (od algoritmo) iterativo è una procedura matematica che consente di determinare una successione x_0, x_1, x_2, \dots che converge ad una radice α dell'equazione $f(x)=0$, ossia ad un valore α tale che $f(\alpha) = 0$.

Si definisce errore al passo k la quantità

$$e_k = x_k - \alpha$$

e si dice che un metodo iterativo è convergente se

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} e_k = 0$$



Equazioni non-lineari

Metodo di bisezione

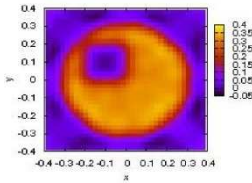
È un metodo estremamente semplice, basato sul seguente

Teorema di Bolzano (o degli zeri)

Sia $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, tale che $f(a)f(b) < 0$. Allora esiste un punto $\xi \in (a,b)$ tale che $f(\xi) = 0$.

Se $f(a)f(b) < 0$, si può calcolare il punto medio $c = (a+b)/2$ e considerare una sola delle seguenti alternative:

- se $f(c) = 0$, allora c è radice dell'equazione $f(x) = 0$;**
- se $f(a)f(c) < 0$, allora una radice è contenuta in (a,c) ;**
- se $f(b)f(c) < 0$, allora una radice è contenuta in (c,b) .**



Equazioni non-lineari

Ripetendo questa procedura sull'intervallo $[a,c]$ oppure $[c,b]$, è possibile ottenere il seguente algoritmo iterativo, detto metodo di bisezione, che dimezza ad ogni passo l'intervallo in cui è contenuta una radice dell'equazione.

Sia $a_0=a$, $b_0=b$, con $f(a)f(b)<0$, $k=1$, e $T>0$ tolleranza fissata

While $|b_{k-1} - a_{k-1}|>T$

Si calcoli il punto medio $x_k = (a_{k-1} + b_{k-1})/2$.

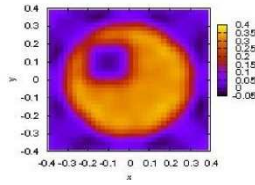
Se $f(x_k)=0$, x_k è radice dell'equazione. STOP.

Se $f(x_k)f(a)<0$, allora $a_k=a_{k-1}$, $b_k=x_k$,

altrimenti $a_k=x_{k-1}$, $b_k=b_{k-1}$.

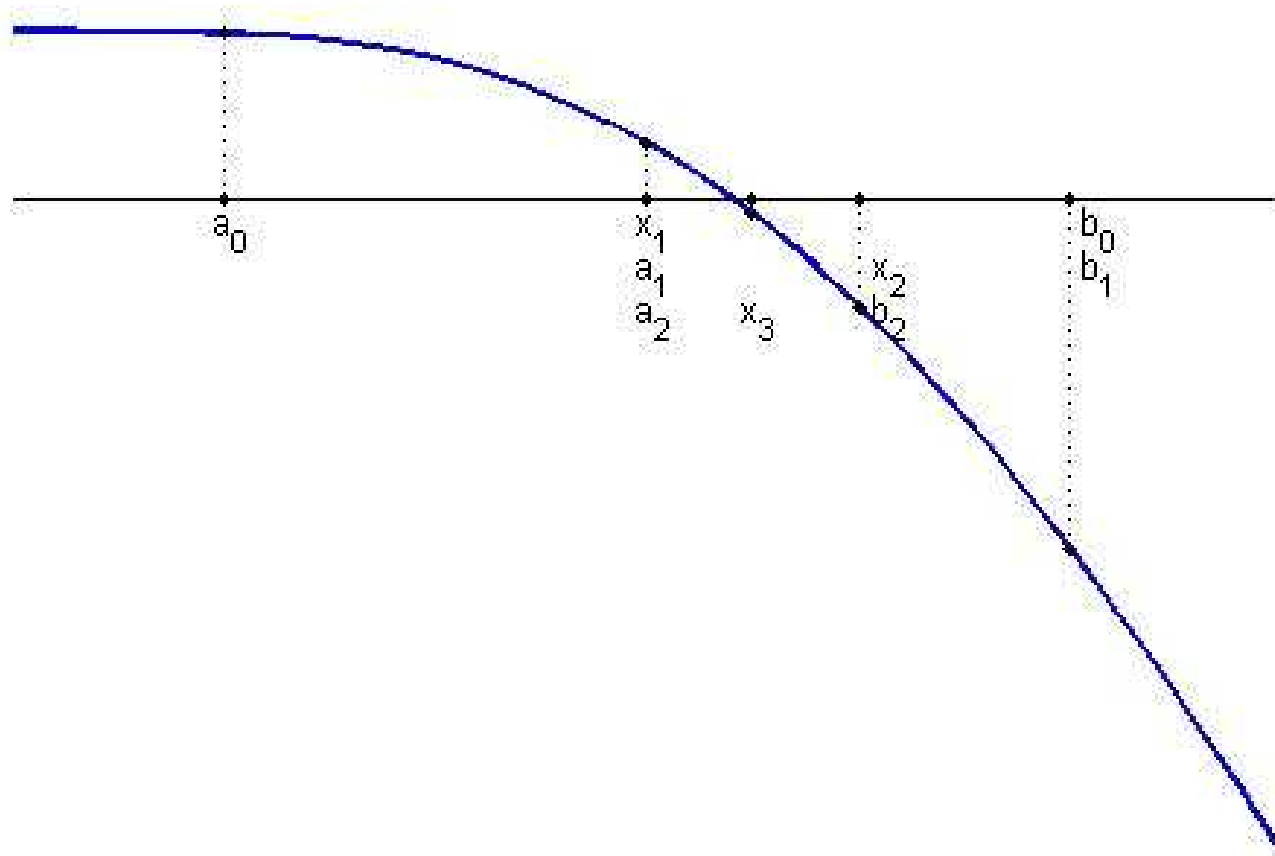
$k=k+1$.

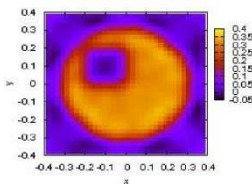
End



Equazioni non-lineari

Metodo di bisezione





Equazioni non-lineari

Metodo Regula Falsi

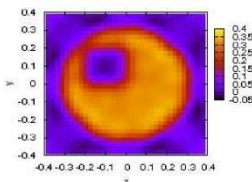
È una semplice variante del metodo di bisezione.

Ad ogni iterazione si considera come punto successivo x_k non la semplice media $x_k=(a_{k-1}+b_{k-1})/2$, ma bensì l'intersezione della retta passante per i punti $(a_{k-1},f(a_{k-1}))$ e $(b_{k-1},f(b_{k-1}))$ con la retta dell'asse x , ossia

$$x_k = (f(b_{k-1})a_{k-1} - f(a_{k-1})b_{k-1}) / (f(b_{k-1}) - f(a_{k-1}))$$

Se $f(a_{k-1}) \neq 0$ e $f(b_{k-1}) \neq 0$, x_k corrisponde alla media pesata di a_{k-1} e b_{k-1} con rispettivi pesi $1/f(a_{k-1})$ e $-1/f(b_{k-1})$. Questa equivale anche alla media pesata con rispettivi pesi $f(b_{k-1})$ e $-f(a_{k-1})$, o anche con rispettivi pesi $|f(b_{k-1})|$ e $|f(a_{k-1})|$, ossia

$$x_k = (|f(b_{k-1})|a_{k-1} + |f(a_{k-1})|b_{k-1}) / (|f(a_{k-1})| + |f(b_{k-1})|). \quad 9$$



Equazioni non-lineari

Rispetto al metodo di bisezione, nel metodo “Regula Falsi” si utilizzano i valori $f(a_{k-1})$ e $f(b_{k-1})$ assunti dalla funzione nei punti estremi dell’intervallo considerato, che hanno il ruolo di pesi nel calcolo del punto medio.

Sia $a_0=a$, $b_0=b$, con $f(a)f(b)<0$, $k=1$, $T>0$ tolleranza fissata

While $|b_{k-1} - a_{k-1}|>T$ and $k < k_{\max}$

Si calcoli $x_k = (f(b_{k-1})a_{k-1} - f(a_{k-1})b_{k-1}) / (f(b_{k-1}) - f(a_{k-1}))$.

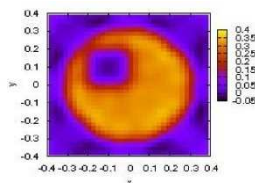
Se $f(x_k)=0$, x_k è radice dell’equazione. STOP.

Se $f(x_k)f(a)<0$, allora $a_k=a_{k-1}$, $b_k=x_k$,

altrimenti $a_k=x_k$, $b_k=b_{k-1}$.

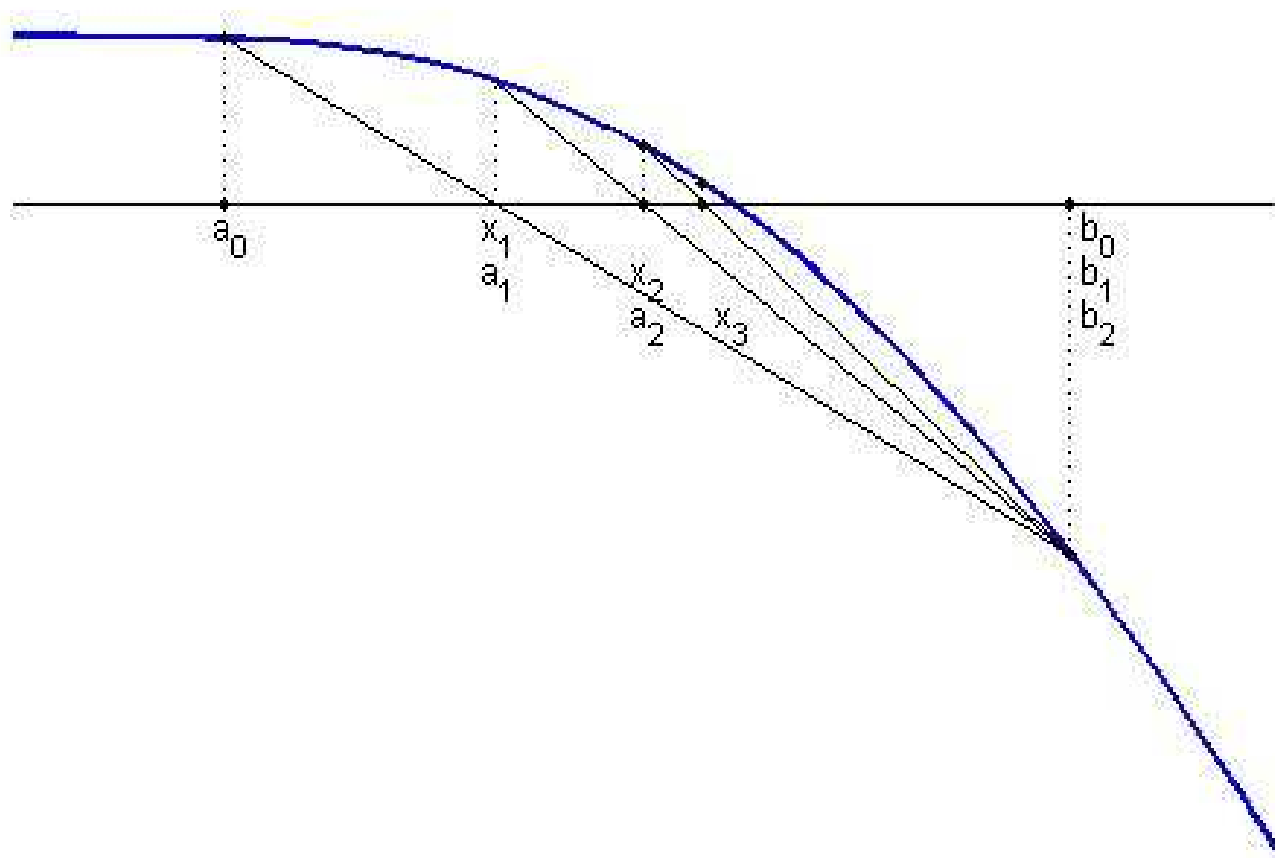
$k=k+1$.

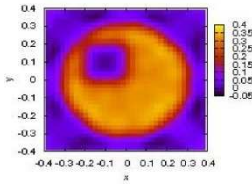
End



Equazioni non-lineari

Metodo "Regula Falsi"





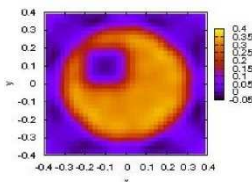
Equazioni non-lineari

Metodo di Newton

È un metodo di fondamentale importanza, poiché rappresenta la strategia di base per risolvere equazioni e sistemi non lineari, denominata “linearizzazione”.

Nel metodo di Newton, la funzione non lineare $f(x)$ è localmente approssimata dalla funzione lineare “più vicina”, ottenuta mediante il troncamento al primo ordine della serie di Taylor di $f(x)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$



Equazioni non-lineari

Approssimando la funzione $f(x)$ mediante il troncamento al primo ordine della sua serie di Taylor, si ottiene una retta la cui radice, ossia l'intersezione con l'asse x , può essere determinata in maniera esplicita.

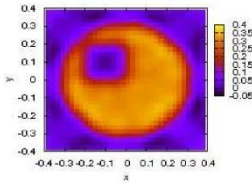
Poiché $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ si risolve l'equazione linearizzata

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

che conduce alla seguente espressione della radice

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

nel caso in cui tale radice esista, ossia se $f'(x_0) \neq 0$.



Equazioni non-lineari

La soluzione dell'equazione linearizzata viene quindi considerata come approssimazione di una radice, e il procedimento di linearizzazione viene iterato.

Si ottiene così il seguente algoritmo iterativo, detto metodo di Newton.

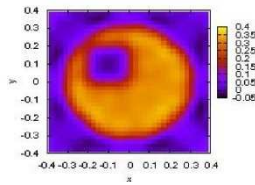
Sia x_0 un (opportuno) valore iniziale, sia $k=0$, $T>0$ tolleranza fissata.

While $|f(x_k)|>T$ and $f'(x_k) \neq 0$ and $k < k_{\max}$

Si calcoli
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

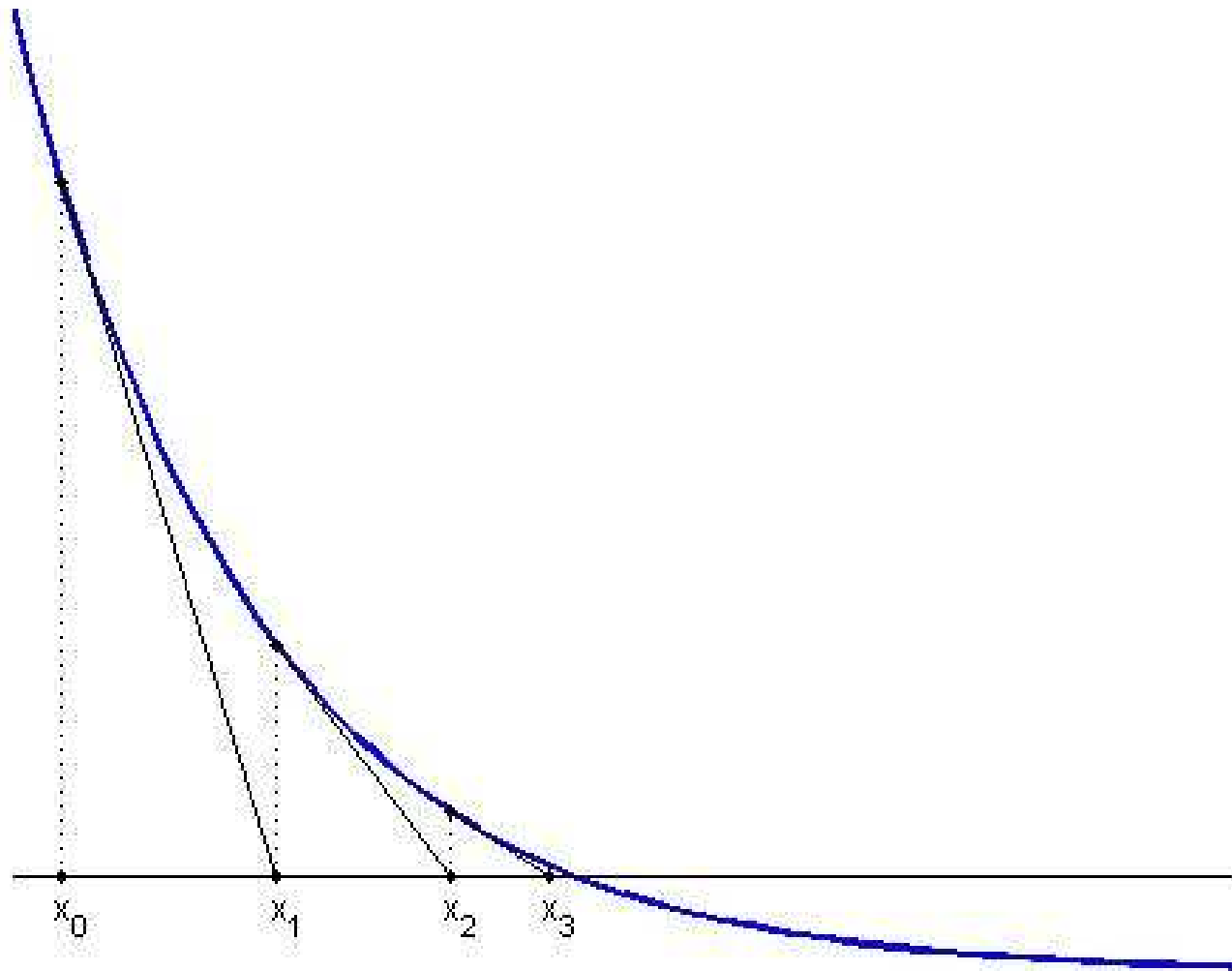
$k=k+1$.

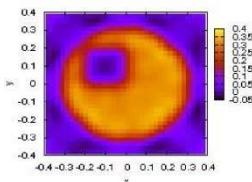
End



Equazioni non-lineari

Metodo di Newton





Equazioni non-lineari

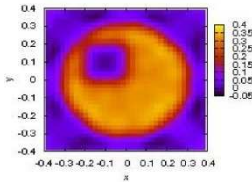
Metodi quasi-Newton

Il metodo di Newton ha lo svantaggio di richiedere la valutazione della derivata prima della funzione f , non sempre disponibile.

Nei metodi quasi-Newton, al posto del valore della derivata prima $f'(x_k)$ si utilizza un'opportuna approssimazione m_k . Il metodo assume quindi la forma generale

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{m_k}$$

con $m_k \neq 0$. Al variare del tipo di approssimazione m_k si ottengono metodi differenti. Vediamone alcuni.



Equazioni non-lineari

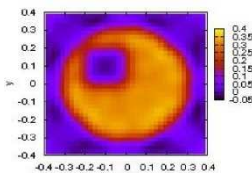
Metodo delle corde (quasi-Newton)

Il metodo delle corde appartiene alla classe dei metodi quasi-Newton. Come approssimazione m_k del valore della derivata prima $f'(x_k)$ si utilizza un valore costante $m \neq 0$.

Il metodo assume quindi la forma

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{m}$$

Una scelta classica è quella di utilizzare il valore della derivata prima nel punto iniziale x_0 . Alternativamente, tale valore può essere aggiornato dopo un numero fissato di iterazioni. Si ottiene così un metodo che ha un costo computazionale minore rispetto al metodo di Newton.₁₇



Equazioni non-lineari

Il metodo delle corde assume quindi la forma seguente.

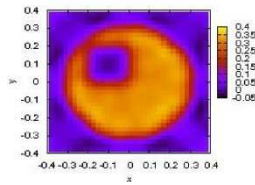
Sia x_0 un (opportuno) valore iniziale, sia $k=0$, T =tolleranza fissata. Sia inoltre m un valore fissato (per esempio $m=f'(x_0)$, o una sua approssimazione).

While $|f(x_k)| > T$ and $k < k_{\max}$

Si calcoli
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{m}$$

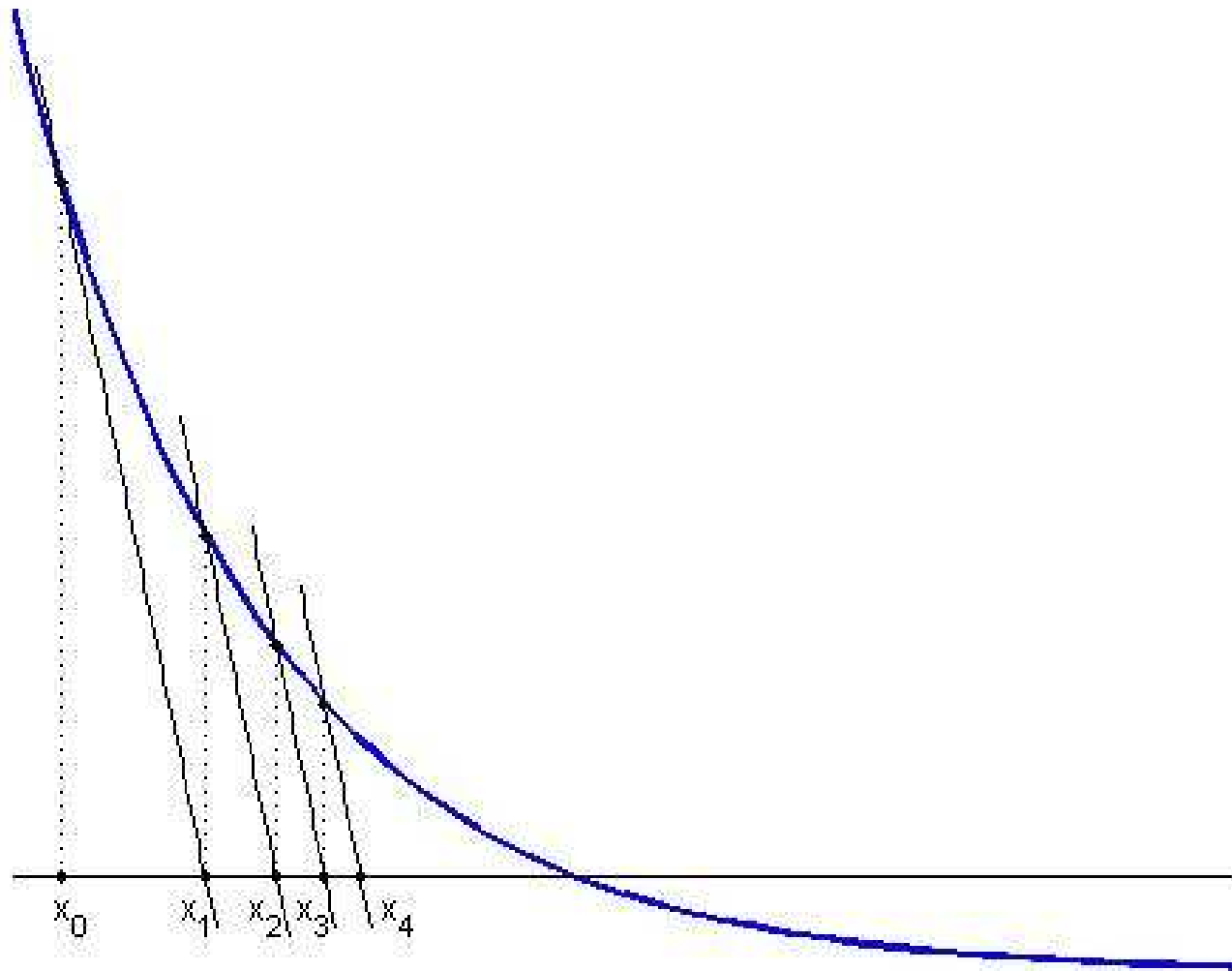
$k=k+1$.

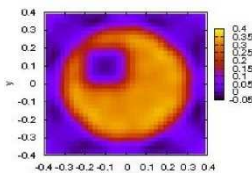
End



Equazioni non-lineari

Metodo delle corde





Equazioni non-lineari

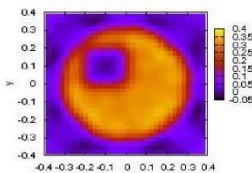
Metodo delle secanti (quasi-Newton)

Il metodo delle secanti appartiene alla classe dei metodi quasi-Newton. Come approssimazione m_k del valore della derivata prima $f'(x_k)$ si utilizza il rapporto incrementale tra le due ultime valutazioni di funzione $f'(x_{k-1})$ e $f'(x_k)$

$$m_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Tale valore corrisponde al coefficiente angolare della retta passante per i punti $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e $(x_k, f(x_k))$.

Si osservino le strette analogie (e le differenze) con il metodo Regula Falsi.



Equazioni non-lineari

Il metodo delle secanti assume la forma seguente.

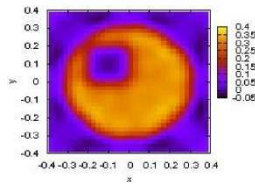
Siano x_0 e x_1 due (opportuni) valori iniziali, sia $k=1$, e T =tolleranza fissata.

While $|f(x_k)| > T$ and $f(x_k) \neq f(x_{k-1})$ and $k < k_{\max}$

Si calcoli
$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

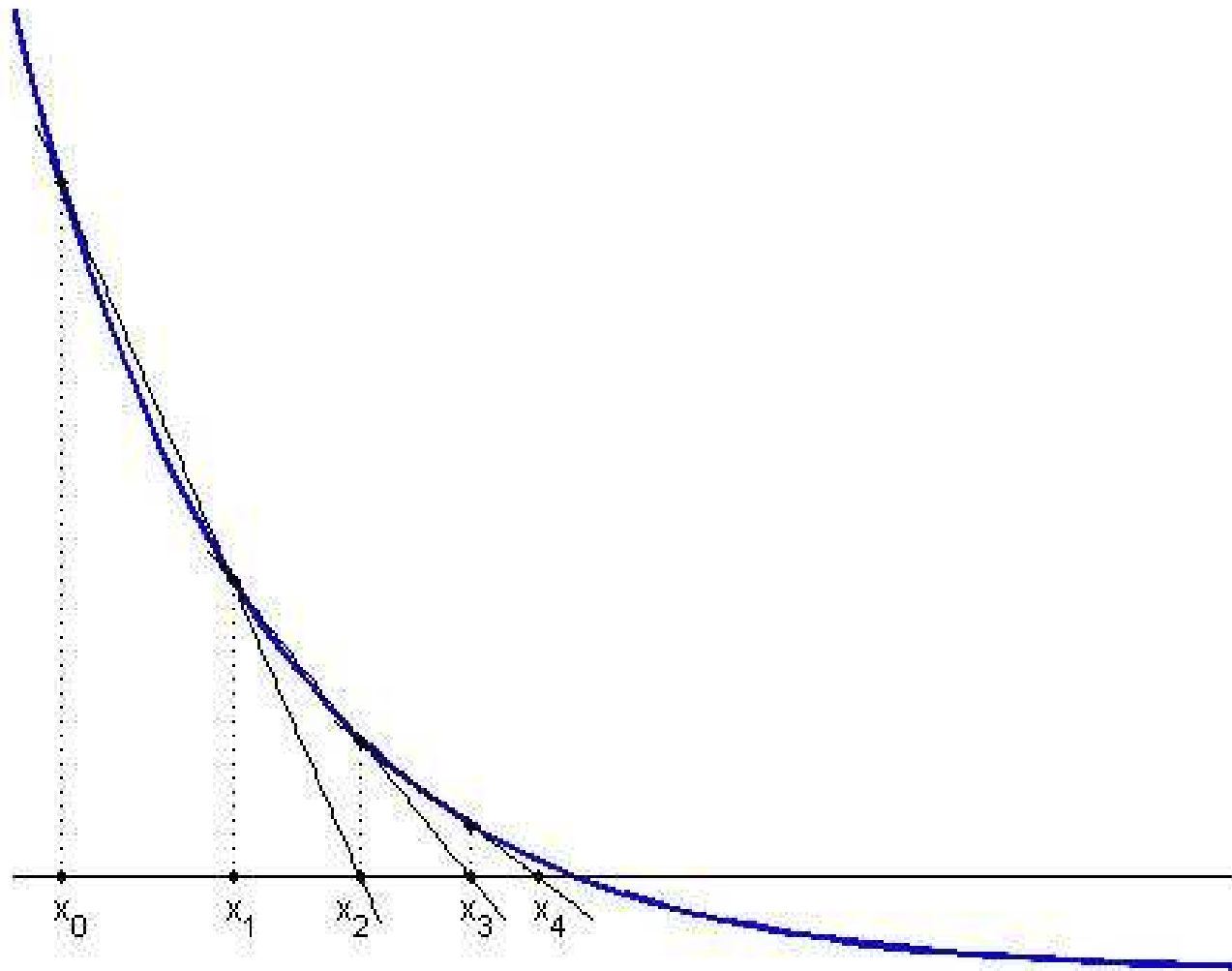
$k=k+1$.

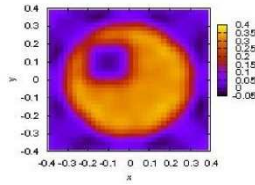
End



Equazioni non-lineari

Metodo delle secanti



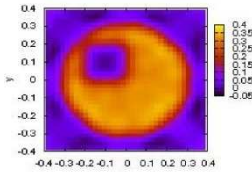


Equazioni non-lineari

Metodi più evoluti si ottengono utilizzando in maniera combinata metodi differenti.

Ad esempio si può alternare una iterazione del metodo di Newton e una del metodo Regula Falsi. Questa strategia è particolarmente efficiente se la funzione è “tutta” concava o convessa (ossia se la derivata seconda ha segno costante) in un intervallo $[a,b]$, con $f(a)f(b) < 0$.

Una strategia utilizzata nelle applicazioni prevede l'uso combinato del metodo di bisezione, delle secanti e di un terzo metodo che non abbiamo considerato (denominato interpolazione quadratica inversa).



Equazioni non-lineari

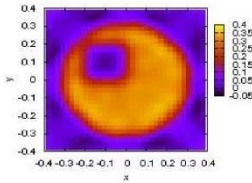
Convergenza dei metodi iterativi

In generale non è detto che un algoritmo iterativo sia convergente, ossia non è detto che la successione delle iterate converga ad una radice.

Il metodo di bisezione, ad esempio, converge sempre.

Il metodo di Newton, ad esempio, può non convergere.

La situazione varia da caso a caso, e può dipendere da proprietà della funzione f o dalla scelta del punto iniziale x_0 (e x_1).



Equazioni non-lineari

Convergenza del metodo di bisezione

Poiché $x_k = (a_{k-1} + b_{k-1})/2$, ad ogni iterazione l'intervallo in cui è contenuta una radice si dimezza. Si ottiene

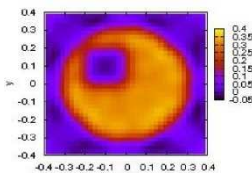
$$|e_k| = |x_k - \alpha| \leq \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} \leq \frac{b_{k-2} - a_{k-2}}{2^2} \leq \dots \leq \frac{b - a}{2^k}$$

e quindi il metodo è sempre convergente.

Dalla stessa relazione, si ha che per raggiungere una certa precisione T occorrono

$$k \geq \log_2(b - a) + \log_2\left(\frac{1}{T}\right)$$

iterazioni.



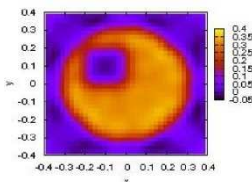
Equazioni non-lineari

Convergenza del metodo di Newton

Esistono anche altri teoremi che fissano condizioni sufficienti alla convergenza del metodo di Newton, spesso legati alla convessità (o concavità) della funzione vicino alla radice.

Infatti se la funzione non cambia verso di concavità, si può intuire graficamente come sia garantita la convergenza nei casi in cui il punto iniziale sia scelto in maniera corretta.

Vediamo un esempio di tali teoremi.



Equazioni non-lineari

Teorema (di convergenza del metodo di Newton)

Sia $f \in C^2[a,b]$.

Se

i. $f(a)f(b) < 0$

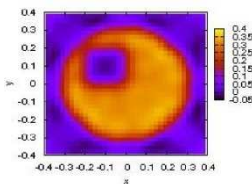
ii. $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a,b]$

iii. $f''(x) \geq 0$ oppure $f''(x) \leq 0, \forall x \in [a,b]$

iv. $|f(a)/f'(a)| < b-a$ e $|f(b)/f'(b)| < b-a$

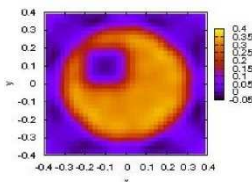
allora

il metodo di Newton converge all'unica soluzione $\alpha \in [a,b]$, per ogni scelta di condizione iniziale $x_0 \in [a,b]$.



Equazioni non-lineari

- **La condizione i. assicura che una radice in (a,b) esista**
- **La condizione ii. assicura che non vi siano tangenti orizzontali. Questo garantisce, insieme ad i., che vi sia una sola radice interna ad (a,b) .**
- **La condizione iii. assicura che la concavità o convessità sia mantenuta su tutto $[a,b]$. Questo garantisce, insieme ad ii., che le iterate x_k siano monotone per $k > 1$.**
- **La condizione iv. assicura che le tangenti agli estremi intersecano l'asse x internamente ad (a,b) . In tal modo tutte le iterate x_k (esclusa eventualmete x_0) risulteranno interne ad (a,b) .**



Equazioni non-lineari

Alcuni casi interessanti per il metodo di Newton:

- Se $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

il metodo è stazionario (“oscillano” i due valori x_0 e x_1).

- Se $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} & \text{se } x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{x^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

si ha convergenza alla radice $\alpha=0$.

- Se $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{se } x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

il metodo diverge.