Corso di Logica Matematica

Anno accademico 2008/2009

Teoria della computabilità (I parte)

Esercizi

Se non diversamente detto, tutte le funzioni sono dai naturali nei naturali.

1. Dimostrare che, fissato k, la funzione $f(x) = k$ è ricorsiva primitiva.

2. Dimostrare che funzione $f(x) = p(x)$, dove p è un polinomio fissato, è ricorsiva primitiva.

3. Sia f una funzione primitiva ricorsiva. Dimostrare in maniera formale che la funzione g, definita mediante

$$g(0, x) = x$$

$$g(n, x) = f \circ f \circ \ldots \circ f(x)\,,$$

dove la composizione è fatta n volte, è anch'essa ricorsiva primitiva .

4. Dimostare in maniera formale che la funzione $f(x) = 2^x$ è ricorsiva primitiva.

5. Dimostrare in maniera formale che la funzione che calcola il fattoriale è ricorsiva primitiva.

6. Dimostrare in maniera formale che la funzione $f(x) = \sum_{y=0}^{x} y$ è ricorsiva primitiva.

7. Si dimostri che non può esistere una enumerazione $f_0, f_1, f_2, \ldots$ di tutte le funzioni totali.

8. Si dimostri che, per ogni i, esistono infiniti indici j tali che $\phi_i = \phi_j$.

9. Dimostrare che esiste una funzione $f : N^2 \longrightarrow N$ ricorsiva (totale) tale che
$$\phi_{f(i,j)}(x) = \phi_i(x) + \phi_j(x)$$
dove la somma è definita su x solo se sia $\phi_i(x)$ che $\phi_j(x)$ sono definite.

10. Sia $A = \{i \mid \phi_i \text{ è totale}\}$. Si dimostri che non esiste alcuna funzione ricorsiva (totale) il cui codominio coincide con A.

11. Sia $A = \mathrm{cod} f$, dove f è definita da
$$f(0) = n_0$$
$$f(n+1) = 2f(n) \ ,$$
con n_0 valore fissato. Dire se A è ricorsivo o r.e. .