

Corso di Logica Matematica

Anno accademico 2009/2010

Predicati, Formule valide, Soddisfacibilità

Esercizi

1. Utilizzando il linguaggio della logica dei predicati, tradurre le seguenti frasi in formule:
 - (a) Matteo non è antipatico a nessuno
 - (b) A qualcuno è antipatico Matteo
 - (c) Non esiste nessuno a cui Matteo è antipatico.
 - (d) Matteo stima Luca e Paolo
 - (e) Nessuno stima Matteo e Luca
 - (f) Chiunque stima Matteo o Luca
 - (g) Chiunque stima Matteo stima anche Luca
 - (h) Se Matteo stima qualcuno, allora stima Paolo
 - (i) Se Matteo stima qualcuno, allora costui stima Paolo
 - (j) Chi non stima Matteo non stima Luca
 - (k) Chi stima Matteo allora è stimato da Luca
 - (l) Se qualcuno stima Matteo allora è stimato da Luca
 - (m) Chiunque stima Matteo, a lui non è antipatico
 - (n) Chiunque stima Matteo e Luca, stima se stesso

- (o) Chiunque stima se stesso stima anche Matteo e Luca
- (p) Chiunque è antipatico stima qualcuno
- (q) Chiunque stima Matteo, a qualcuno è antipatico
- (r) Solo se qualcuno stima Matteo allora tutti stimano Luca
- (s) Solo se qualcuno stima Matteo allora tutti sono stimati da Luca
- (t) Se qualcuno stima Matteo allora tutti stimano Luca
- (u) O qualcuno stima Matteo o nessuno stima Luca
- (v) Se Luca stima Matteo, allora tutti stimano Matteo
- (w) Nessun antipatico stima Matteo
- (x) Se tutti gli antipatici non stimano Matteo, allora qualche antipatico stima Luca
- (y) Se nessun antipatico stima Matteo, allora non tutti non stimano Luca

2. Stabilire se il termine t è libero per x in α , dove

- (a) $t = f_1^1(x_1)$
 $x = x_1$
 $\alpha = \forall x_2(A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow A_1^1(x_1))$
- (b) $t = f_1^2(x_1, x_1)$
 $x = x_1$
 $\alpha = \forall x_2(A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow A_1^1(x_1))$
- (c) $t = f_1^2(x_1, x_2)$
 $x = x_1$
 $\alpha = \forall x_2(A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow A_1^1(x_1))$
- (d) $t = f_1^1(x_1)$
 $x = x_2$
 $\alpha = \forall x_2(A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow A_1^1(x_1))$
- (e) $t = f_1^1(x_1)$
 $x = x_2$
 $\alpha = \forall x_2 A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow A_1^1(x_2)$
- (f) $t = f_1^2(x_1, x_2)$
 $x = x_2$
 $\alpha = \forall x_2(A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow A_1^1(x_1))$

- (g) $t = f_1^2(x_1, x_2)$
 $x = x_1$
 $\alpha = \forall x_2(A_1^2(x_2, x_2) \rightarrow \forall x_1 A_1^1(x_1))$
- (h) $t = f_1^2(x_1, x_3)$
 $x = x_1$
 $\alpha = \forall x_2 A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow A_1^1(x_1)$
- (i) $t = f_1^2(x_1, x_2)$
 $x = x_1$
 $\alpha = \forall x_2 A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow A_1^1(x_1)$

3. Verificare che ciascuna delle seguenti formule predicative è logicamente valida (procedere, come illustrato a lezione, verificando che la negazione della formula è insoddisfacibile, ossia verificando che non può esistere alcuna successione s in alcuna interpretazione (D, g) che soddisfi la formula negata):

- (a) $\forall x \alpha \rightarrow \exists x \alpha$
- (b) $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x \beta)$, con α non contenente x libera
- (c) $\forall x_1 \forall x_2 \alpha \leftrightarrow \forall x_2 \forall x_1 \alpha$
- (d) $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x \alpha \rightarrow \forall x \beta)$
- (e) $(\forall x \alpha \wedge \forall x \beta) \leftrightarrow \forall x(\alpha \wedge \beta)$
- (f) $(\forall x \alpha \vee \forall x \beta) \rightarrow \forall x(\alpha \vee \beta)$
- (g) $\exists x_1 \exists x_2 \alpha \leftrightarrow \exists x_2 \exists x_1 \alpha$
- (h) $\exists x_1 \forall x_2 \alpha \rightarrow \forall x_2 \exists x_1 \alpha$
- (i) $(\exists x \alpha \rightarrow \forall x \beta) \rightarrow \forall x(\alpha \rightarrow \beta)$
- (j) $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x \alpha \rightarrow \exists x \beta)$

4. Verificare che ciascuna delle seguenti formule predicative non è logicamente valida (procedere come illustrato a lezione, determinando un'interpretazione rispetto alla quale la formula non è vera):

- (a) $\forall x_2 \exists x_1 A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow \exists x_1 \forall x_2 A_1^2(x_1, x_2)$
- (b) $(\forall x_1 A_1^1(x_1) \rightarrow \forall x_1 A_2^1(x_1)) \rightarrow \forall x_1(A_1^1(x_1) \rightarrow A_2^1(x_1))$
- (c) $\forall x_1(A_1^1(x_1) \vee A_2^1(x_1)) \rightarrow (\forall x_1 A_1^1(x_1) \vee \forall x_1 A_2^1(x_1))$

5. Verificare le seguenti conseguenze logiche:

$$(a) \forall x(A(x) \rightarrow B(x) \wedge C(x)) \models \forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \wedge \forall x(A(x) \rightarrow C(x))$$

$$(b) (\forall x \forall y (A(x, y) \vee A(y, x))) \models \forall x \exists y A(x, y)$$

$$(c) \neg \exists x (A(x) \rightarrow B(x)) \models \forall x A(x) \wedge \neg \exists x B(x)$$

$$(d) \forall x (A(x) \vee B(a)) \models \neg B(a) \rightarrow A(b)$$

$$(e) \forall x (A(x) \rightarrow \exists y B(y)) \models \exists y (A(y) \rightarrow B(y))$$

6. Utilizzando come lettera predicativa unicamente $G(x, y) =$ “ x è genitore di y ”, verificare la validità del ragionamento seguente :

Andrea e Carlo sono fratelli; Andrea ha un cugino. Quindi anche Carlo ha un cugino.