

Corso di Logica Matematica

Anno accademico 2009/2010

Derivazioni nel sistema formale K della logica proposizionale

Esercizi

1. Nel sistema formale K, determinare le derivazioni seguenti (può risultare agevole svolgere gli esercizi nell'ordine indicato):
 - (a) $\vdash \alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta)$
(sugg.: Teorema di deduzione)
 - (b) $\vdash \neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
(sugg.: Teorema di deduzione e contrapposizione, oppure considerare $\neg \alpha, \alpha \vdash \beta$ vista a lezione.)
 - (c) $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \beta))$
(sugg.: Teorema di deduzione e contrapposizione.)
 - (d) $\vdash \alpha \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta))$
(sugg.: Teorema di deduzione, contrapposizione ed usare il teorema dell'esercizio (1a).)
 - (e) $\vdash (\neg \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$
(sugg.: In virtù dell'assioma A2 si ha:
 $(\neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg(\neg \alpha \rightarrow \alpha))) \rightarrow ((\neg \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\neg \alpha \rightarrow \neg(\neg \alpha \rightarrow \alpha)))$, ivi usare il teorema dell'esercizio (1b), e successivamente la contrapposizione.)
 - (f) $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta)$
(sugg.: Teorema di deduzione, contrapposizione ed usare il teorema dell'esercizio (1e).)
 - (g) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \vdash \alpha \rightarrow (\neg \gamma \rightarrow \neg \beta)$
 - (h) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \vdash \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
 - (i) $\alpha \rightarrow \beta \vdash (\neg \alpha \rightarrow \neg \gamma) \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta)$
 - (j) $\vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow ((\neg \alpha \rightarrow \neg \gamma) \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg \gamma))$
 - (k) $\alpha \vdash (\neg(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \neg \alpha) \rightarrow (\neg \gamma \rightarrow \neg \beta)$
 - (l) $\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \neg \beta \vdash \neg \alpha$
(sugg.: Usare contrapposizione ed il teorema dell'esercizio (1e).)
 - (m) $\alpha, \beta \vdash \neg(\alpha \rightarrow \neg \beta)$
(sugg.: Usare il teorema dell'esercizio (1a).)