Logica Matematica
Prova scritta del 14 giugno 2011

Corso di Laurea Specialistica in Tecnologie Informatiche, Università di Cagliari

Calcolabilità

Dimostrazione DC

Dimostrare che l'insieme $K = \{i \mid \phi_i(i) \downarrow\}$ è r.e. e non ricorsivo.

In alternativa, nel caso in cui non siate riusciti a svolgere il precedente, provate a svolgere il seguente: Enunciare e dimostrare il teorema s-m-n.

Esercizio E1C

Sia A un insieme ricorsivamente enumerabile, e sia k un numero naturale fissato. Dimostrare che esiste una funzione g totale ricorsiva tale che, per ogni x,

$$W_{g(x)} = \begin{cases} W_{k^2} & \text{se } x \in A \\ \emptyset & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Esercizio E2C

Sia $A = \text{cod}f$, dove f è definita da

$$f(0) = n_0$$
$$f(n+1) = 2f(n)^2 + 3f(n) ,$$

con n_0 numero naturale fissato. Giustificando la risposta, dire se A è ricorsivo e se A è r.e. .

Esercizio E3C (Facoltativo)

Si dimostri che non può esistere una enumerazione $f_0, f_1, f_2, \ldots$ di tutte le funzioni totali.

Logica delle proposizioni e dei predicati

Dimostrazione DL

Enunciare e dimostrare il teorema di correttezza forte in K.

In alternativa, nel caso in cui non siate riusciti a svolgere il precedente, provate a svolgere il seguente: Dimostrare che ognuno dei tre insiemi di connettivi $B_1 = \{\neg, \wedge\}$, $B_2 = \{\neg, \vee\}$ e $B_3 = \{\neg, \rightarrow\}$ è una base.

Esercizio E1L

Verificare nel sistema formale K la seguente derivazione:

$$\alpha \rightarrow \beta \vdash (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$$

sugg.: per la derivazione può essere utile invocare il teorema $\vdash (\neg\gamma \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma$.

Esercizio E2L

Utilizzando il linguaggio della logica dei predicati, tradurre la seguenti frasi in formule:

Se nessuno è antipatico, allora non tutti non stimano Matteo

Solo se colui che non è stimato da qualcuno non è simpatico a Matteo, allora qualcuno, se non è simpatico a se stesso, è stimato da Matteo e Luca.

Esercizio E3L

Giustificando la risposta, stabilire se il termine $f_2^3(x_3, x_2, x_2)$ è libero per x_1 in

$\exists x_2(\neg\exists x_1(A_2^2(x_1, f_1^1(x_1)) \to A_2^2(x_2, x_2)) \to A_1^1(x_3) \wedge \neg\forall x_1 A_1^1(f_1^1(x_1))) \to (A_2^2(x_2, f_1^1(x_2)) \wedge \neg\exists x_1\exists x_2 A_1^2(x_2, x_1))$

Esercizio E4L

Per mezzo della soddisfacibilità mediante successioni, verificare la validità della formula predicativa seguente:

$$\forall x\,(\alpha \to \beta) \to (\forall x\,\alpha \to \exists x\,\beta)$$

Esercizio E5L

1. Verificare che
$$\forall z(S(z) \to R(z) \vee R(f(z)))\,, \forall x(R(x) \vee \exists y S(y)) \models \neg\forall x \neg R(x)$$

2. Provare a verificare la validità della formula seguente e, se questa non è valida, determinare un contromodello
$$\forall x \forall y(R(x, y) \vee R(y, x)) \models \exists x \forall y R(x, y)$$

Esercizio E6P (Facoltativo)

(i) Rappresentare la seguente formula aritmetica

$$0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = (1 \cdot 0) \cdot 1 + 1$$

nel sistema formale P.

(ii) Mostare che la numerazione gödeliana dà luogo ad una funzione iniettiva $G : D \to N$ dall'insieme D costituito dai simboli $a_0, a_1, \ldots, a_p$, dalle espressioni, e dalle successioni di espressioni del sistema formale P all'insieme N dei numeri naturali.

ASSIOMI

Assiomi di K

A1 $\quad \alpha \to (\beta \to \alpha)$

A2 $\quad (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

A3 $\quad (\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta)$

Assiomi di F
A1, A2, A3 e

A4 $\quad \forall x \alpha(x) \to \alpha(t)$, se t è un termine libero per x in $\alpha(x)$.

A5 $\quad \forall x(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x \beta)$, se la variabile x non è libera in α