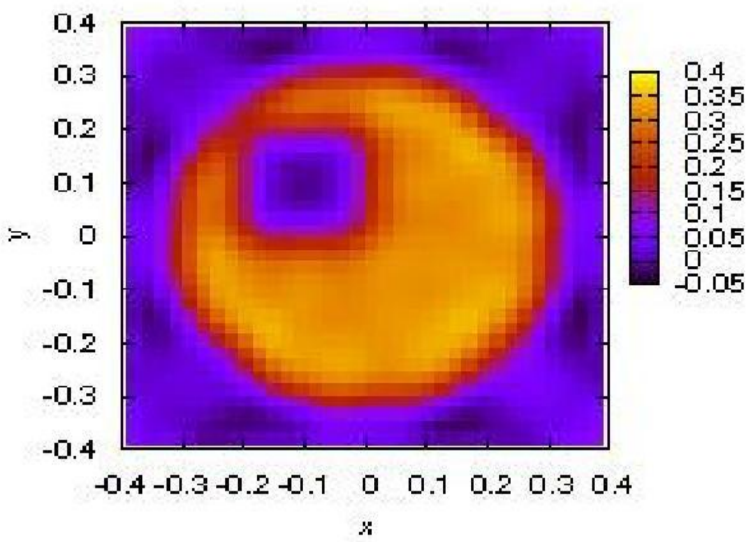
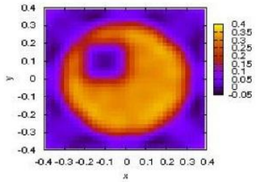


Docente: Claudio Estatico

(estatico@uninsubria.it)

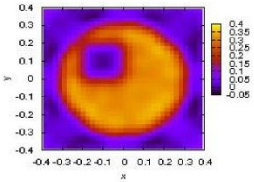
Integrazione numerica

Lezione basata su appunti del prof. Marco Gaviano



Integrazione numerica

1) **Formule di quadratura.**
2) **Grado di esattezza.**
3) **Metodo dei coefficienti indeterminati.**
4) **Formule di quadratura interpolatorie.**
5) **Formule di Newton-Cotes semplici. Formule di Newton-Cotes composite.**
6) **Errore delle Formule di Newton-Cotes.**



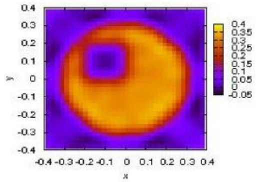
Integrazione numerica

Consideriamo il problema di calcolare l'integrale definito

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

di una funzione f:[a,b]→R.

Le formule di quadratura sono formule che consentono il calcolo (approssimato) di integrali definiti.



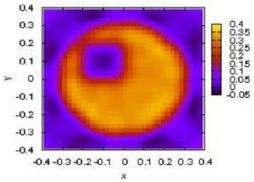
L'approssimazione dell'integrale definito

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

viene fatta per mezzo di una formula di quadratura del tipo

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j f(x_j)$$

che rappresenta una combinazione lineare degli n+1 valori assunti dalla funzione f nei punti, detti nodi, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ con coefficienti fissati, detti pesi, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.



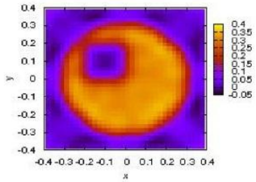
Fissato n, intendiamo approssimare il valore esatto I(f) con I_n(f). Al variare dai pesi e dei nodi si ottengono differenti formule di quadratura.

Diremo che una formula di quadratura ha grado di esattezza (o precisione algebrica) r>=0 se I_n(p)=I(p) per ogni polinomio p di grado (al più) r.

Poichè ogni formula di quadratura ha almeno grado di esattezza 0, considerando il polinomio p_0(x)=1, otteniamo innanzitutto che

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j = b - a$$

infatti $I_n(p_0) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j 1 = I(p_0) = b - a$

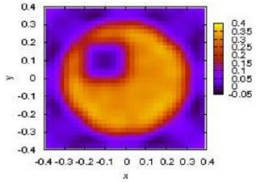


Metodo dei coefficienti indeterminati

Per costruire una formula di quadratura, fissati arbitrariamente n+1 nodi distinti $x_0, x_1, \dots, x_n$, si possono determinare i pesi $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ in modo che la formula abbia grado di esattezza n.

Infatti, grazie alla linearità dell'integrale, è sufficiente imporre la condizione di esattezza sui polinomi della base canonica

$$I_n(x^i) = I(x^i) \quad i = 0, 1, \dots, n$$



Poichè l'integrale esatto $I(x^i) \quad i = 0,1,\dots,n$ **si calcola facilmente per via analitica, infatti**

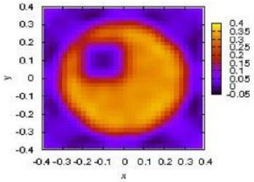
$$I(x^i) = \int_a^b x^i dx = \frac{b^{i+1} - a^{i+1}}{i+1} \qquad i = 0,1,\dots,n \ ,$$

imponendo l'esattezza della formula di quadratura fino al grado n otteniamo

$$\sum_{j=0}^{n} x_j^i \alpha_j = \frac{b^{i+1} - a^{i+1}}{i+1} \qquad i = 0,1,\dots,n$$

ossia il sistema lineare $$V^t \alpha = c$$

con V matrice (n+1)*(n+1) di Vandermonde $V_{i,j} = x_{i-1}^{j-1}$ **(non singolare) e c vettore dei termini noti.**



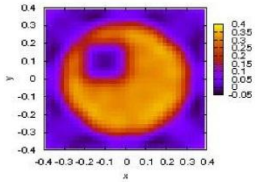
Riassumendo, dal sistema lineare $V^t\alpha = c$

con

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \text{con } c_i = \frac{b^{i+1} - a^{i+1}}{i+1}$$

si ottiene il vettore $\alpha = (\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \ldots \quad \alpha_n)$ **contenente i coefficienti della formula di quadratura**

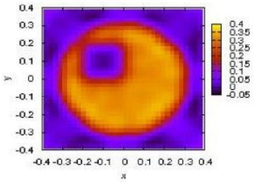
$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j f(x_j)$$



Il metodo dei coefficienti indeterminati consente, in generale, di ottenere i pesi che conducono a precisione algebrica n per ogni scelta arbitraria degli n+1 nodi $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Tale metodo non è conveniente dal punto di vista computazionale poiché molto costoso ed instabile.

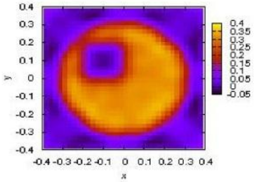
Una metodologia alternativa conduce alle formule di quadratura interpolatorie.



Formule di quadratura interpolatorie.

Nelle formule di quadratura interpolatorie, fissati arbitrariamente n+1 nodi distinti $x_0,x_1,\ldots,x_n$, si sostituisce la funzione integranda con il polinomio interpolatore di grado n passante per i punti di $(x_0,f(x_0))$, $(x_1,f(x_1))$, …, $(x_n,f(x_n))$.

Tale polinomio interpolatore, nella forma di Lagrange, conduce ad una esplicita formula per il calcolo dei pesi $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.



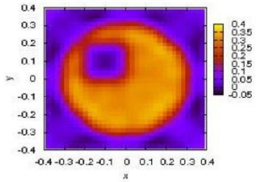
Infatti, dalla relazione

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) L_j(x)$$

dove $L_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}, \quad j = 0,1,2,\ldots,n$ **otteniamo**

$$I_n(f) = \int_a^b p_n(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{j=0}^{n} f(x_j) L_j(x) \right) dx =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \int_a^b L_j(x)dx = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j f(x_j)$$

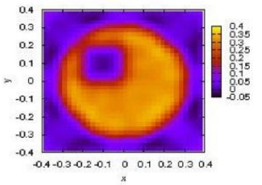


ossia, la formula di quadratura interpolatoria con n+1 nodi

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j f(x_j)$$

ha i pesi $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dati da

$$\alpha_j = \int_a^b L_j(x)\,dx$$

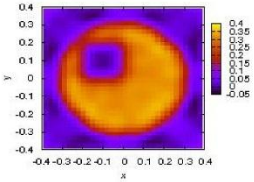


Teorema

Ogni formula interpolatoria con n+1 nodi ha grado di esattezza almeno n.

Dimostrazione

Considerando n+1 nodi di interpolazione, se f è un polinomio di grado al più n allora, per l'unicità del polinomio interpolatore, il polinomio interpolatore p_n coincide con f. La tesi si ottiene osservando che le formule interpolatorie sono esatte per costruzione sul polinomio interpolatore.



Formule di Newton-Cotes (semplici)

Sono formule di quadratura interpolatorie su [a,b] costruite su nodi equispaziati di passo h

$$x_j = x_0 + jh, \qquad j = 0,\dots,n$$

Fissato h, in tali formule i pesi α_j dipendono solo da n.

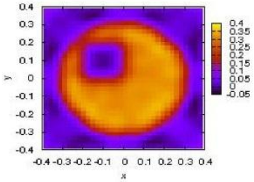
Le formule si dividono in:

- **Chiuse se gli estremi a e b sono inclusi tra i nodi**

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad h = (b-a)/n$$

- **Aperte se gli estremi a e b non sono inclusi tra i nodi**

$$x_0 = a+h, \quad x_n = b-h, \quad h = (b-a)/(n+2)$$



Tramite il cambio di variabile $x = x_0 + ht$ **nel caso di formule chiuse si ha**

$$\alpha_j = \int_a^b L_j(x)dx = h\int_0^n L_j(x_0 + th)dt = h\int_0^n \varphi_j(t)dt$$

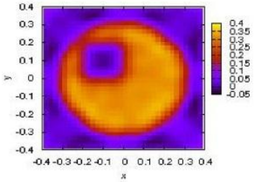
dove

$$\varphi_j(t) = L_j(x_0 + th) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{t-k}{j-k}$$

Si ottiene così

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j f(x_j) = h\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j)$$

con $w_j = \int_0^n \varphi_j(t)dt$ **valore fisso, dipendente solo da n.**



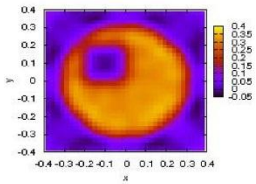
Analogamente, nel caso formule aperte si ha

$$\alpha_j = \int_a^b L_j(x)dx = h\int_{-1}^{n+1} L_j(x_0+th)dt = h\int_{-1}^{n+1}\varphi_j(t)dt$$

Nelle formule di Newton-Cotes, poiché i nodi sono in posizioni fissate, si ottengono pesi $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ che possono essere calcolati una volta per tutte.

Si ottengono così semplici tabelle contenenti i pesi al variare del grado n.

Vediamo alcuni esempi.



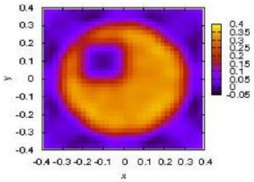
Formula dei rettangoli (n=0 aperta)

è la formula aperta ottenuta per n=0. è anche detta formula del punto medio. Si ha

$$\varphi_0 = 1, \qquad w_0 = \int_{-1}^{1} \varphi_0(t)\,dt = 2$$

da cui

$$I_0(f) = 2h\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$



Formula dei trapezi (n=1 chiusa)

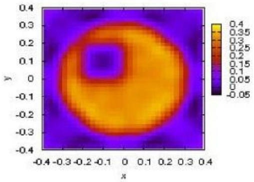
è la formula chiusa ottenuta per n=1. Si ha

$$\varphi_0(t) = 1 - t, \qquad w_0 = \int_0^1 (1-t)\,dt = 1/2$$

$$\varphi_1(t) = t, \qquad w_1 = \int_0^1 t\,dt = 1/2$$

da cui

$$I_1(f) = \frac{h}{2}[f(a) + f(b)] = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$



Formula di Cavalieri-Simpson (n=2 chiusa)

è la formula chiusa ottenuta per n=2. Si ha

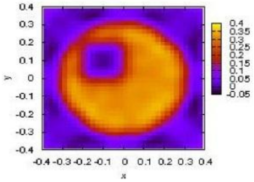
$$\varphi_0(t) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2), \qquad w_0 = \int_0^2 \frac{1}{2}(t-1)(t-2)dt = 1/3$$

$$\varphi_1(t) = t(2-t), \qquad w_1 = \int_0^2 t(2-t)dt = 4/3$$

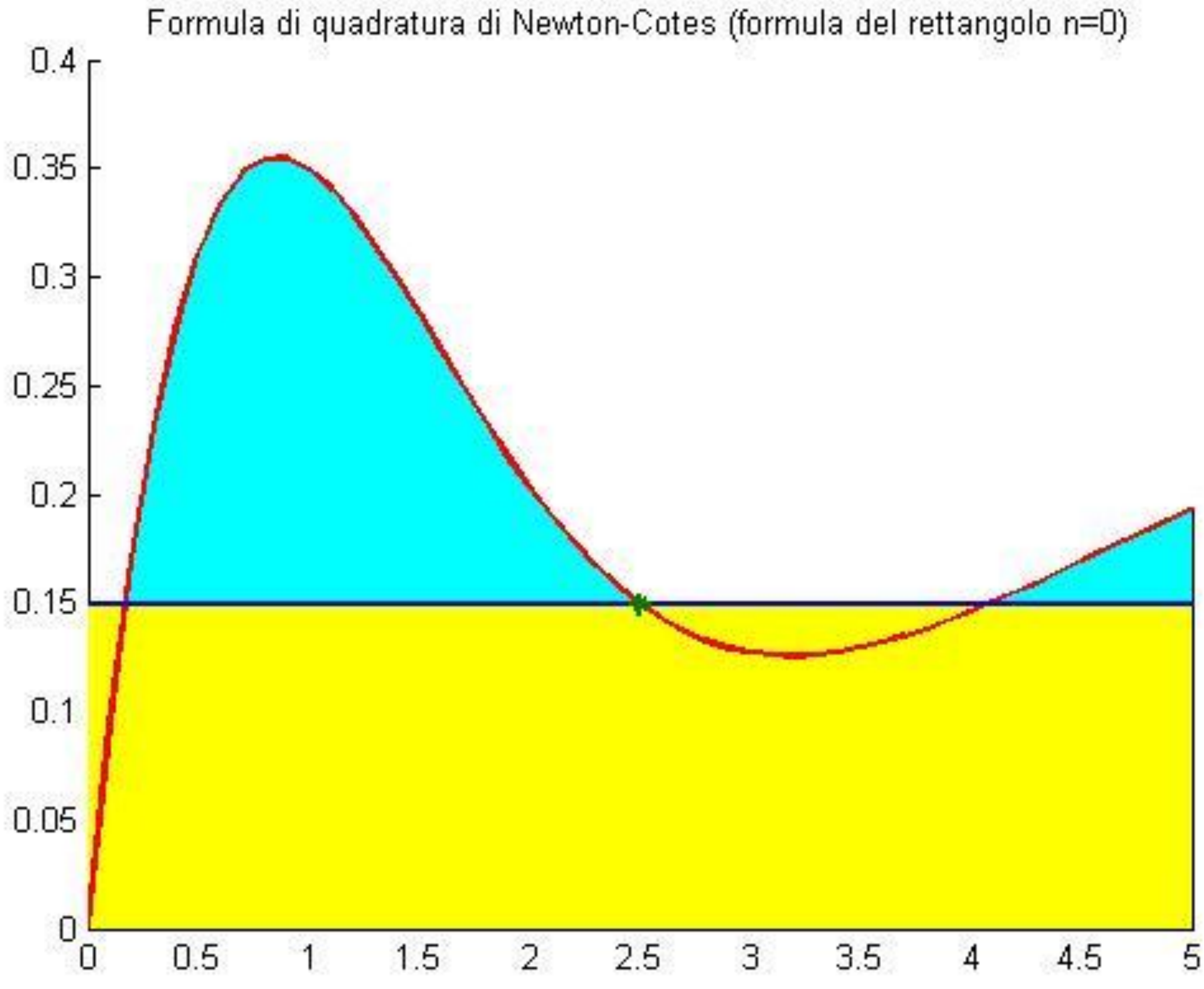
$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2}t(t-1), \qquad w_2 = \int_0^2 \frac{1}{2}t(t-1)dt = 1/3$$

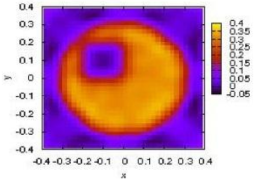
da cui

$$I_2(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

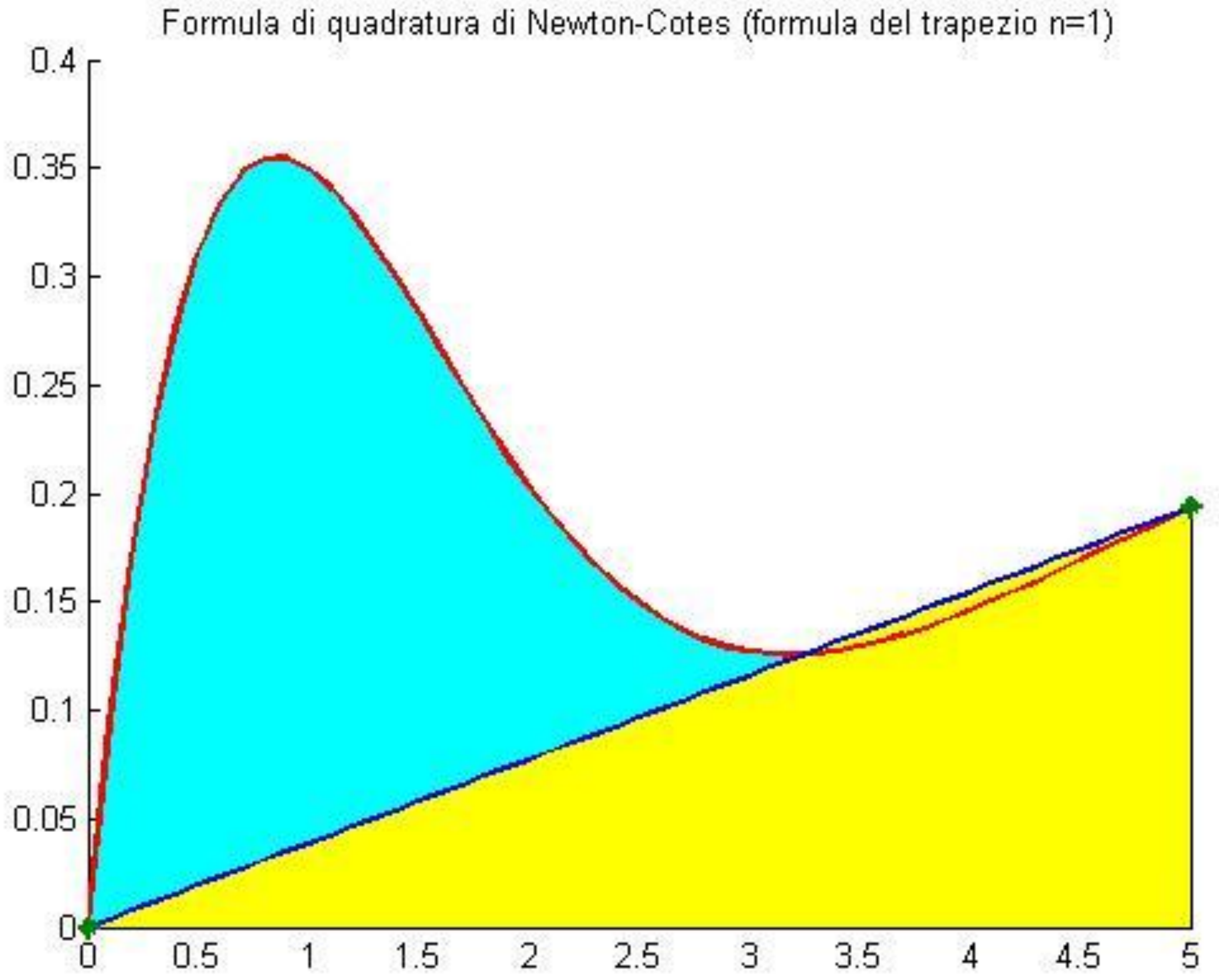


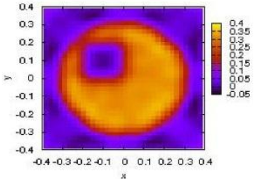
Integrazione numerica



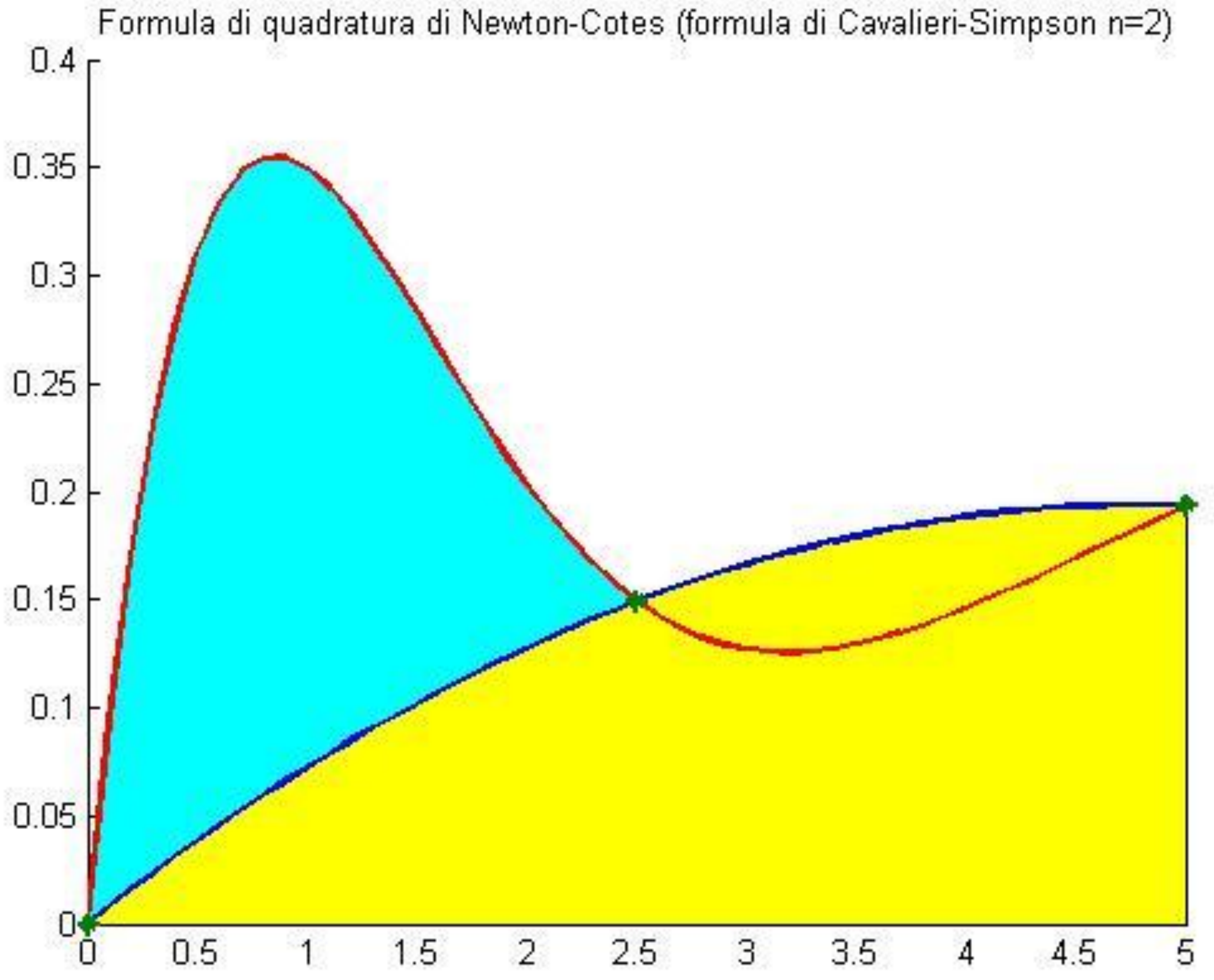


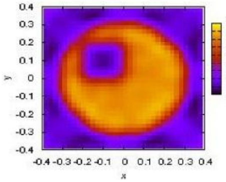
Integrazione numerica



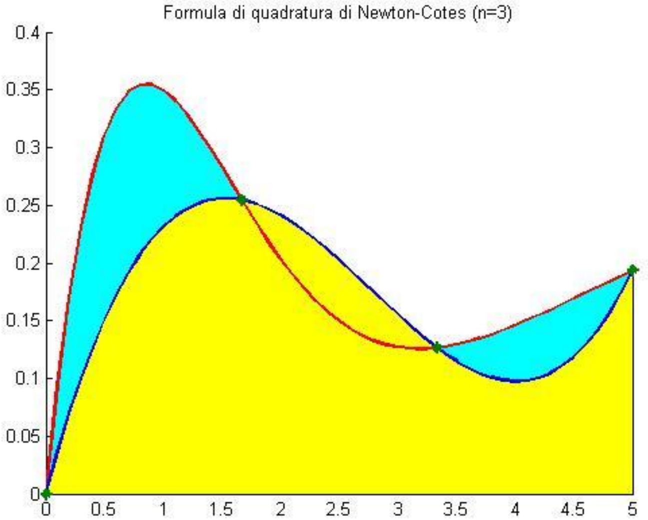


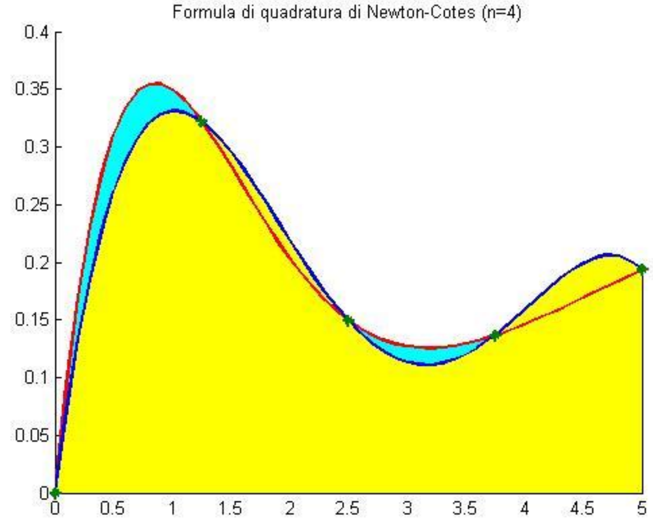
Integrazione numerica

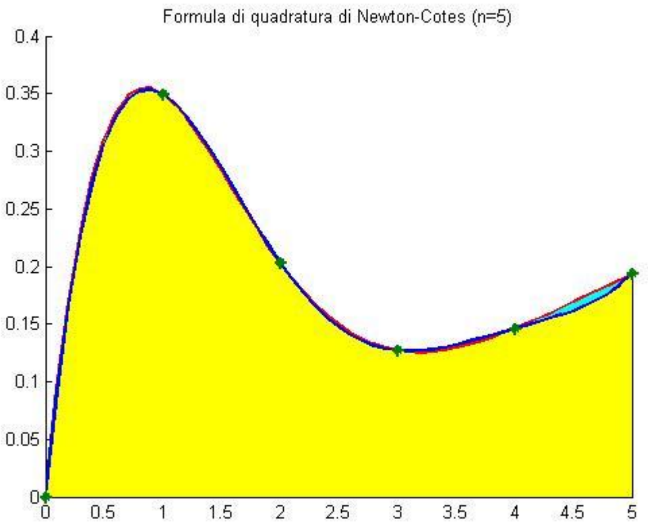


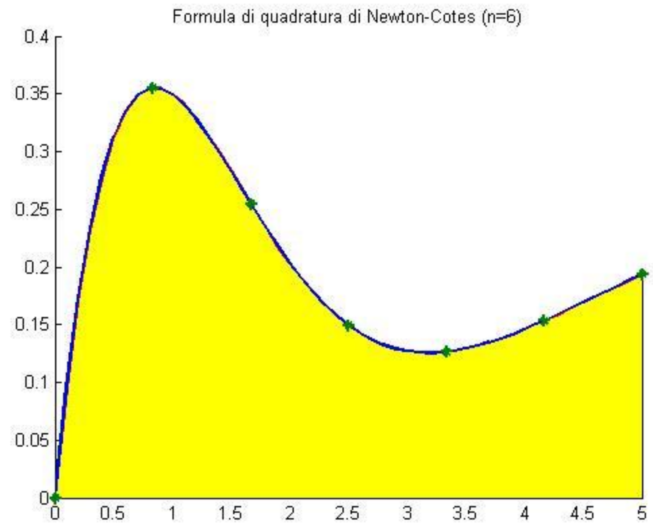


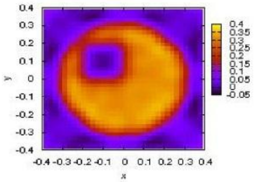
Integrazione numerica







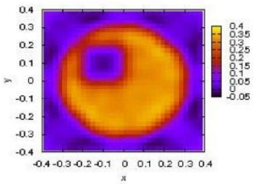




Osservazioni:

i) **I pesi delle formule di quadrature di Newton Cotes sono simmetrici rispetto al centro, ossia $\alpha_0=\alpha_n$, $\alpha_1=\alpha_{n-1}$, $\alpha_2=\alpha_{n-2}$,… Questo è dovuto alla simmetria della base di Lagrange su nodi simmetrici.**

ii) **Poichè i pesi sono simmetrici, ogni formula di Newton-Cotes è esatta su ogni funzione dispari integrata su un dominio simmetrico, ossia [-a,a] (si osservi che in tal caso l'integrale definito è sempre uguale a 0). Quindi ogni formula di Newton-Cotes è esatta su ogni polinomio di grado dispari. Ne consegue che le formule di grado pari hanno grado di esattezza n+1 (il primo dispari successivo all'n pari).**

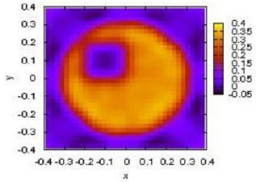


Nella pratica, non si utilizzano formule di Newton-Cotes di grado elevato nella forma precedente, detta semplice.

Questo poiché :

i) non sempre il polinonio interpolatore converge uniformemente alla funzione, anche se quest’ultima è molto regolare (addirittura infinitamente derivabile), e quindi anche l’integrale può risultare non preciso;

ii) l’utilizzo di formule di grado elevato in aritmetica finita risulta essere numericamente instabile poiché, per n>6, i pesi α_0, α_1, …, α_n non risultano più essere tutti di segno positivo.



Formule di Newton-Cotes composite

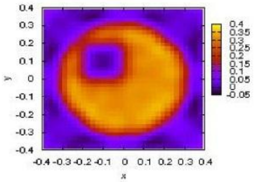
Consideriamo una discretizzazione di n+1 punti equispaziati su [a,b] di passo h=(b-a)/n

$$x_i = x_0 + ih, \qquad i = 0,\ldots,n$$

Per l'additività dell'integrale si ha

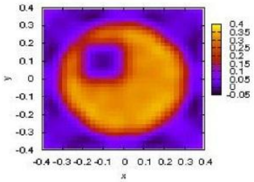
$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

Per approssimare I(f) possiamo quindi sommare (opportune approssimazioni de)gli n integrali sui domini di ampiezza minore.



Sfruttando la proprietà additiva dell'integrale rispetto al dominio di integrazione, si suddivide l'intervallo [a,b] in sottointervalli contigui ed equispaziati e si utilizza su ciascun sottointervallo una formula di Newton-Cotes nella forma semplice. Infatti, poiché l'ampiezza h del dominio di integrazione di ogni integrale può essere resa sufficientemente piccola, una formula di Newton-Cotes di grado basso risulta già sufficientemente accurata. In tal modo si ottengono formule di quadratura molto precise e numericamente stabili.

Tali formule vengono dette formule di Newton-Cotes composite.



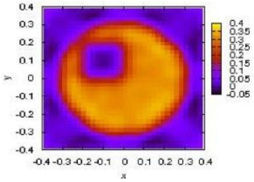
Formula dei rettangoli composita

Considerando la formula dei rettangoli semplice su ciascuno degli n sottointervalli $[x_{i-1},x_i]$, i=1,…,n

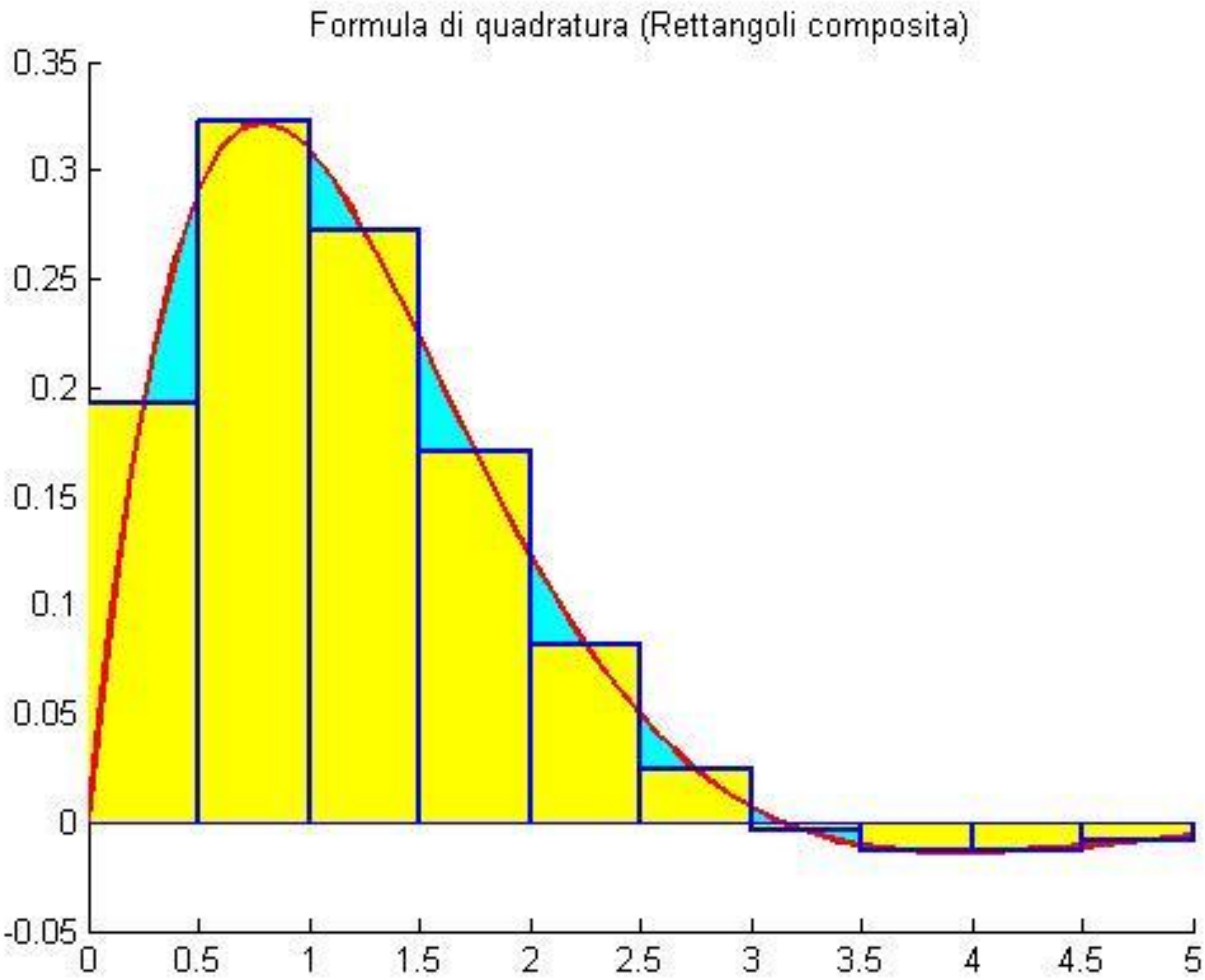
$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = (x_i - x_{i-1})\, f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$$

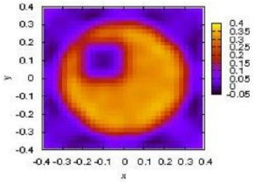
si ottiene la formula dei rettangoli composita

$$I_0^{(C)}(f) = h\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$$



Integrazione numerica





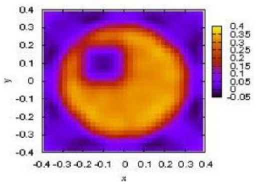
Formula dei trapezi composita

Considerando la formula dei trapezi semplice su ciascuno degli n sottointervalli $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,\ldots,n$

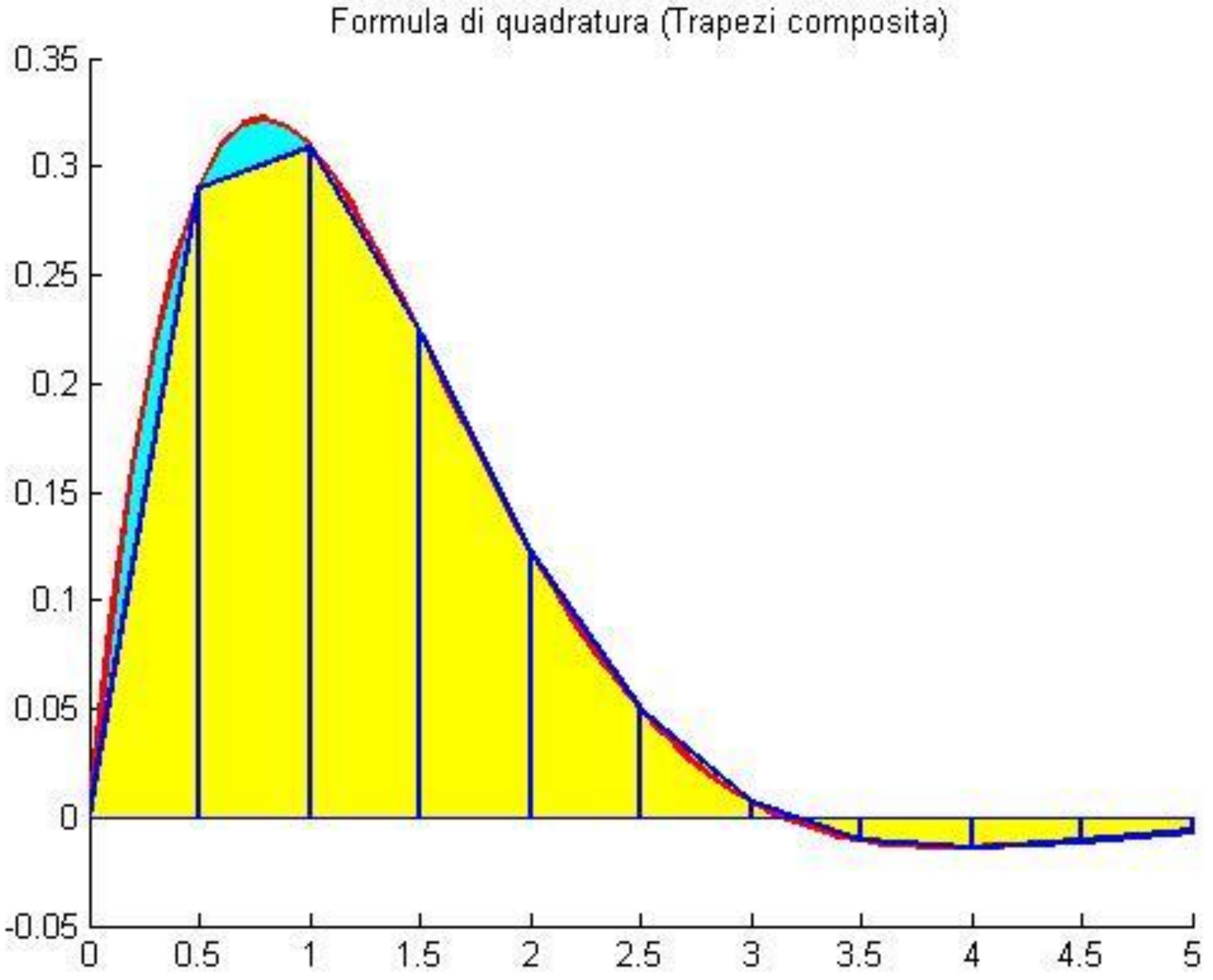
$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{x_i - x_{i-1}}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

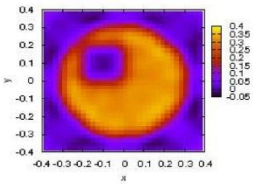
si ottiene la formula dei trapezi composita

$$I_1^{(C)}(f) = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right]$$



Integrazione numerica





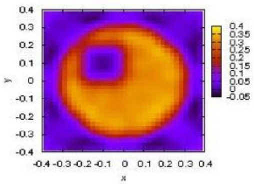
Formula di Simpson composita

Considerando la formula di Cavalieri-Simpson semplice su ciascuno degli n/2 sottointervalli $[x_{2i-2}, x_{2i}]$, i=1,…,n/2

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx = \frac{x_{2i} - x_{2i-2}}{6}\left[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i}) \right]$$

per n pari si ottiene la formula di Simpson composita

$$I_2^{(C)}(f) = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + f(b) \right]$$



Errore nelle formule di Newton-Cotes

Ricordiamo che se f$\in$C^{n+1}[a,b] allora esiste un valore ξ_x t.c.

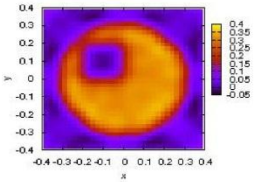
$$E(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)\, f^{(n+1)}(\xi_x)$$

dove p_nè il polinomio interpolatore di grado n.

Applicando tale risultato alle formule di quadratura interpolatorie, si ottiene

$$E_n(f) = I(f) - I_n(f) = \int_a^b (f(x) - p_n(x))dx = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_n(x)dx$$

dove $\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$



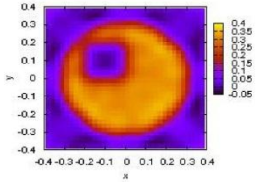
Otteniamo così la seguente espressione per l'errore delle formule di quadratura interpolatorie

$$E_n(f) = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_n(x)dx = \frac{f^{(n+1)}\left(\eta\right)}{(n+1)!}\int_a^b \omega_n(x)dx$$

con $\eta \in \left[a,b\right]$ **, dove l'ultima uguaglianza è dovuta ad una generalizzazione del teorema della media.**

Nelle formule di Newton-Cotes, poiché l'insieme dei nodi è equispaziato, è possibile calcolare esplicitamente gli integrali

$$\int_a^b \omega_n(x)dx = \int_a^b (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)dx$$



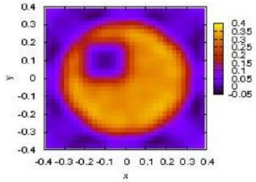
Ad esempio, per n=1, risolvendo analiticamente l'integrale

$$\int_a^b \omega_1(x)dx = \int_a^b (x-a)(x-b)dx = -\frac{(b-a)^3}{6} \ ,$$

otteniamo la seguente espressione per l'errore commesso dalla formula di quadratura dei trapezi semplice

$$E_1(f) = \frac{f''(\eta)}{(n+1)!}\int_a^b \omega_n(x)dx = -\frac{f''(\eta)}{12}(b-a)^3 \ ,$$

dove $\eta \in [a,b]$**, sebbene non sia conosciuto esplicitamente.**

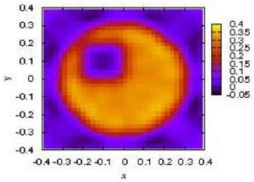


Le espressioni trovate per l'errore possono essere facilmente estese al caso della formula di quadratura composite: basterà sommare i contributi dei singoli errori su ogni sottointervallo.

Ad esempio nel caso della formula di quadratura dei trapezi composita, considerando l'errore all'intervallo i-esimo $[x_{i-1},x_i]$, i=1,…,n

$$E_1^{(i)}(f)=\frac{f''(\eta_i)}{2!}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\omega_1(x)dx=-\frac{f''(\eta_i)}{12}(x_i-x_{i-1})^3=-\frac{f''(\eta_i)}{12}h^3$$

dove $\eta\in\left[x_{i-1},x_i\right]$, e sommando tali errori, si ottiene l'errore



commesso dalla formula dei trapezi composita

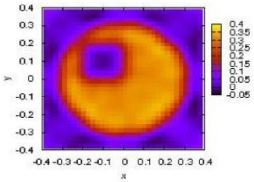
$$E_1^{(C)}(f)=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{f''(\eta_i)}{12}h^3\right)=-\frac{h^2}{12}\frac{(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n}f''(\eta_i)$$

$$=-\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\overline{\eta})$$

con $\overline{\eta}\in[a,b]$ **dato dal teorema della media.**

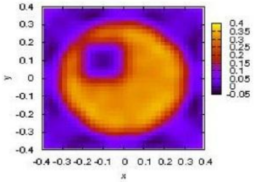
Come conseguenza, poiché h=(b-a)/n, si ha che l'errore tende a zero per n→∞.

Si osservi che tale risultato è dovuto alla riduzione a zero dell'ampiezza h di ciascun sottointervallo $[x_{i-1},x_i]$, **i=1,…,n.**



Svolgendo calcoli analoghi per le formule di Newton-Cotes dei rettangoli e di Simpson, semplici e composite, posto $M_n=\max_{x\in[a,b]}|f^{(n)}(x)|$, si ottiene la tabella seguente

	Formule semplici	Formule composite
Rettangoli	$\left\|E_0(f)\right\| \le \frac{M_2}{24}(b-a)^3$	$\left\|E_0^{(C)}(f)\right\| \le \frac{M_2}{24}(b-a)h^2$
Trapezi	$\left\|E_1(f)\right\| \le \frac{M_2}{12}(b-a)^3$	$\left\|E_1^{(C)}(f)\right\| \le \frac{M_2}{12}(b-a)h^2$
Simpson	$\left\|E_2(f)\right\| \le \frac{M_4}{90}((b-a)/2)^5$	$\left\|E_2^{(C)}(f)\right\| \le \frac{M_4}{180}(b-a)h^4$



Esempio: numero di nodi con f.d.q. di Simpson composita

Sia $f(x)=e^x$. In tal caso $M_n=\max_{x\in[a,b]}|f^{(n)}(x)|= e^b$ per ogni n.

Si eottiene che l'errore commesso dalla formula di quadratura di Simpson composita è maggiorato da

$$\left|E_2^{(C)}(f)\right| \le \frac{e^b}{180}(b-a)h^4$$

In questo caso, se vogliamo un errore minore di 10^{-6}, integrando su [a,b]=[0,3], occorre utilizzare n+1 nodi con

$$\frac{e^b}{180}(b-a)\left(\frac{(b-a)}{n}\right)^4 < \tau \quad \text{ossia} \quad n > \sqrt[4]{\frac{10^6 e^3}{180}3^5} \approx 72.1$$