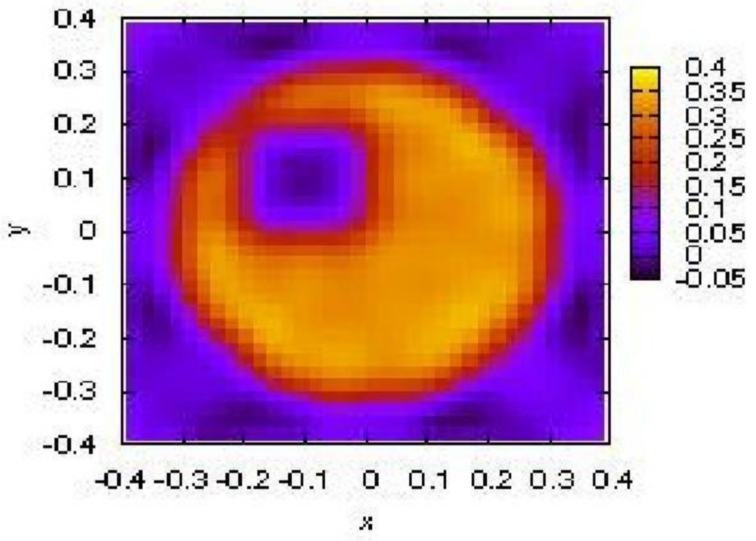
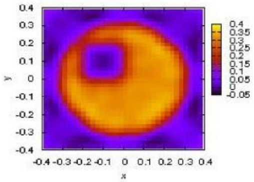


Docente: Claudio Estatico

(estatico@uninsubria.it)

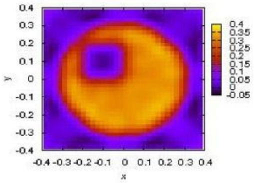
Approssimazione di funzioni mediante Interpolazione polinomiale

Lezione basata su appunti del prof. Marco Gaviano



Approssimazione di funzioni

1) **L'approssimazione di funzioni. Interpolazione e migliore approssimazione.**
2) **Interpolazione polinomiale. Esistenza e unicità.**
3) **Interpolazione di Lagrange e di Hermite.**
4) **Convergenza dell'interpolazione polinomiale. Errore di interpolazione.**



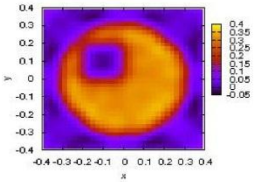
Approssimazione di funzioni

Sia data la tabulazione

$$x_i\,,\ y_i \qquad \text{per} \quad i = 0,1,\ldots,n$$

di una funzione y=f(x), con f:R→R, di cui non si conosce la sua espressione analitica.

L'obiettivo è trovare una "nuova" funzione p(x), p: R→R , dotata di una rappresentazione analitica "semplice", che approssimi la funzione f(x) (in modo tale che p(x) possa essere utilizzata al posto della f(x)).

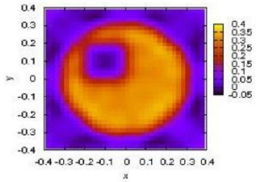


Esempio

Si rileva la temperatura in una stanza ogni secondo nell'arco delle 24 ore. Si hanno quindi a disposizione 3600*24=86400 dati, ovvero le coppie

$$x_i\,,\ y_i \qquad \text{per } i = 0,1,\ldots,86400$$

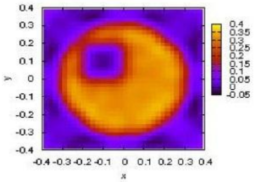
in cui la variabile x si riferisce ai secondi, e la y alle corrispondenti temperature.



La conoscenza, in forma analitica, di una funzione p(x) di forma semplice che approssima la funzione vera f(x) a partire dai punti di tabulazione (x_i, y_i), per i=1,…,n, permette un trattamento efficiente del modello matematico che esprime il fenomeno, specie al calcolatore.

Infatti

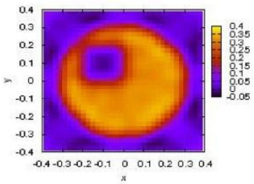
- **per memorizzare la funzione basta memorizzare la legge che definisce p(x), generalmente dipendente da meno parametri rispetto a f(x).**
- **posso approssimare, tramite la p(x), la f(x) anche in qualsiasi altro punto esterno alle ascisse x_i di tabulazione.**



Osservazione

Si arriva allo stesso problema quando di una funzione f(x) si conosce la sua espressione analitica ma questa è complicata da calcolare, da derivare o da integrare.

Allora, in tal caso, tramite una tabulazione di f(x) si vuole determinare un “nuova” funzione p(x) dotata di una rappresentazione analitica “semplice” da valutare, da derivare o da integrare, che possa essere utilizzata al posto della f(x).

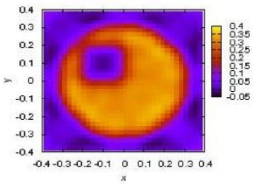


Osservazione

Il problema si generalizza al caso di funzione di 2 variabili z=f(x,y) , f:R^2→ R, della quale si conoscono i valori

$$(x_i,\ y_j),\ \ z_{i,j}\ \ per\quad i=0,1,...,n,\ j=0,1,...,m$$

e si vuole trovare un nuova funzione p(x,y), dotata di una rappresentazione analitica "semplice", che possa essere utilizzata al posto della f(x,y).



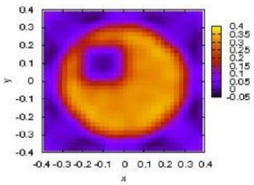
Tecniche per la soluzione del problema

Interpolazione

si cerca quella funzione (in una fissata famiglia di funzioni) che in opportuni punti (detti nodi) assume gli stessi valori della funzione da approssimare.

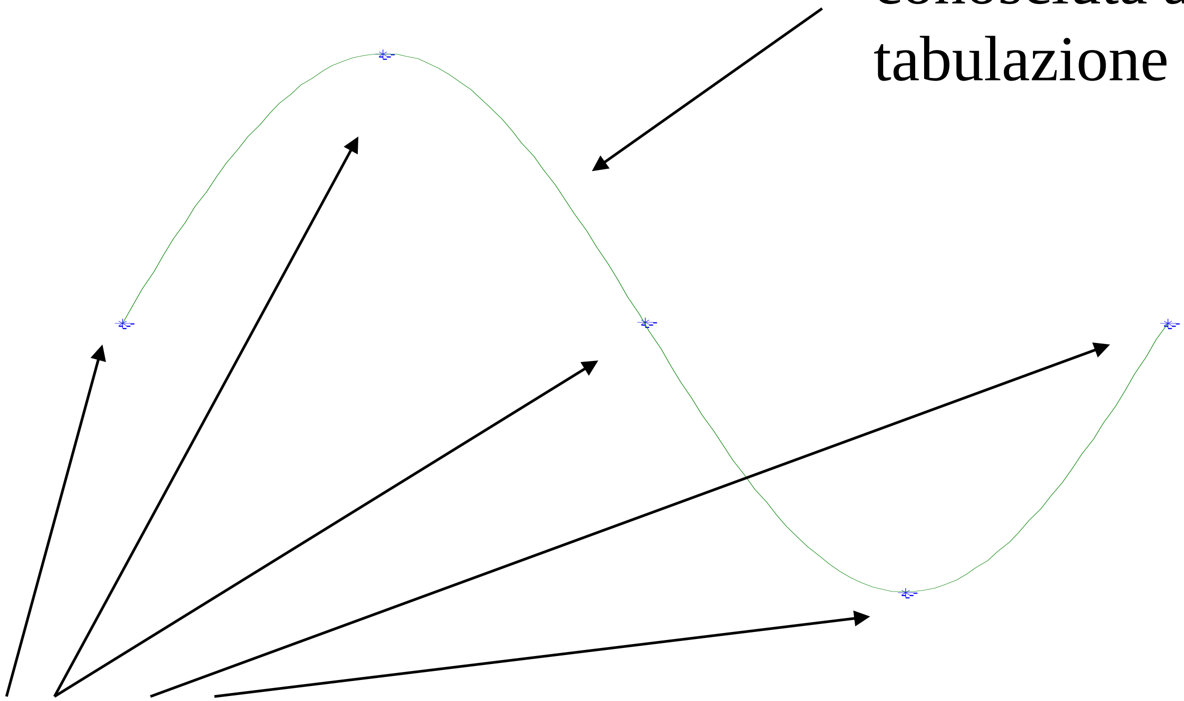
Migliore approssimazione

si cerca quella funzione (in una fissata famiglia di funzioni) la cui distanza (rispetto ad una fissata norma) dalla funzione da approssimare risulta essere minima.

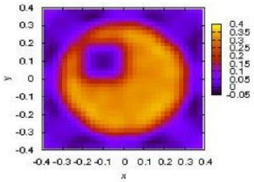


Interpolazione

funzione f(x) da approssimare, conosciuta attraverso una sua tabulazione (x_i, y_i)



Punti (detti nodi di interpolazione) in cui la funzione f(x) e la sua approssimazione p(x) devono coincidere



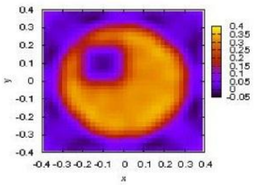
Approssimazione mediante interpolazione (formulazione matematica)

Dati i punti x_i, y_i, i=0,1,…, n, con $x_i \in R$, $x_i \neq x_k$ per $i \neq k$. e una famiglia di funzioni

$$\Phi(x; a_0, ..., a_n) \qquad \text{"il modello matematico"}$$

si cercano i valori a_0, a_1,…, a_n (corrrispondenti ai gradi di libertà della famiglia di funzioni Φ) tali che

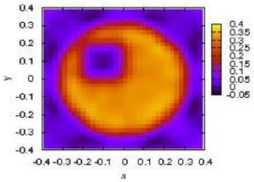
$$\Phi(x_i; a_0, ..., a_n) = y_i \qquad i = 0,1,...,n$$



Nel caso in cui la famiglia di funzioni $\Phi(x;\, a_0, \ldots, a_n)$ dipenda linearmente dai parametri $a_0, \ldots, a_n$, ovvero nel caso in cui esistano n funzioni base $\Phi_i(x)$ per i=1,…,n , t.c.

$$\Phi(x; a_0, \ldots, a_n) \equiv a_0\Phi_0(x) + a_1\Phi_1(x) + \ldots + a_n\Phi_n(x)$$

allora il problema è detto di interpolazione lineare.

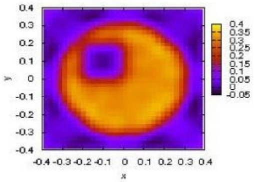


Esempio: Interpolazione polinomiale

La famiglia di funzioni $\Phi(x; a_0, \ldots, a_n)$ è definita da

$$\Phi(x; a_0, \ldots, a_n) \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_n x^n$$

e quindi si approssima la funzione f(x), la cui tabulazione è x_i, y_i, con un polinomio di grado n (da notare che i punti sono n+1 ed il polinomio è di grado n).

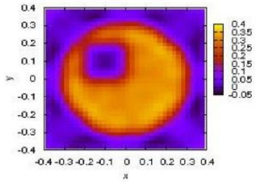


Esempio: Interpolazione trigonometrica

La famiglia di funzioni $\Phi(x; a_0, \ldots, a_n)$ è definita da

$$\Phi(x; a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n) \equiv$$
$$\equiv a_0 + a_1 \cos x + b_1 sen x + \ldots + a_n \cos(nx) + b_n sen(nx)$$

e quindi si approssima la funzione f(x), la cui tabulazione è x_i, y_i, con una combinazione lineare delle funzioni sen(kx) e cos(kx), per k=0,…,n, detta polinomio trigonometrico.

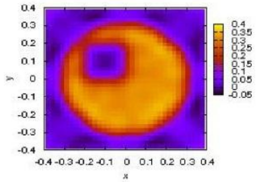


Esempio: Interpolazione nello studio delle popolazioni in biologia (dinamica delle popolazioni)

La famiglia di funzioni $\Phi(x; a_0, \ldots, a_n)$ è definita da

$$\Phi(x; a_0, ..., a_n, \lambda_0, ..., \lambda_n) \equiv a_0 e^{\lambda_0 x} + a_1 e^{\lambda_1 x} ... + a_n e^{\lambda_n x}$$

si approssima la funzione f(x), la cui tabulazione è x_i, y_i, i=0,2,…,n, con una combinazione lineare di funzioni esponenziali.



Interpolazione polinomiale

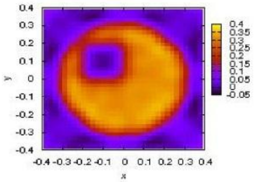
La famiglia di funzioni $\Phi(x; a_0, \ldots, a_n)$ è definita da

$$\Phi(x; a_0, \ldots, a_n) \equiv p(x) \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_n x^n$$

e si cerca il polinomio $p(x) \in P_n$, dove P_n rappresenta l'insieme dei polinomi di grado ≤ n, tale che

$$p(x_i) = y_i , \quad i = 0,1,2,\ldots,n$$

Risultato fondamentale: il polinomio p(x), detto polinomio interpolatore, esiste ed è unico.



Esistenza ed unicità del polinomio interpolatore (n=3)

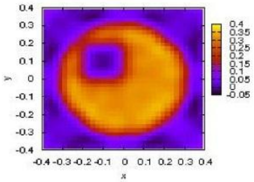
Trova

$$p(x) \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

tale che $p(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,2,\ldots,n$ **, ossia tale che**

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 &= y_0 \\
a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 &= y_1 \\
a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 &= y_2 \\
a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 &= y_3
\end{aligned}$$

Questo è un sistema lineare 4×4 in cui le incognite sono i 4 parametri a_0, …, a_3 che definiscono il polinomio.



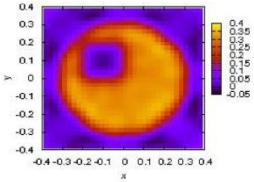
Il determinante della matrice del sistema è

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix}$$

determinante di Vandermonde

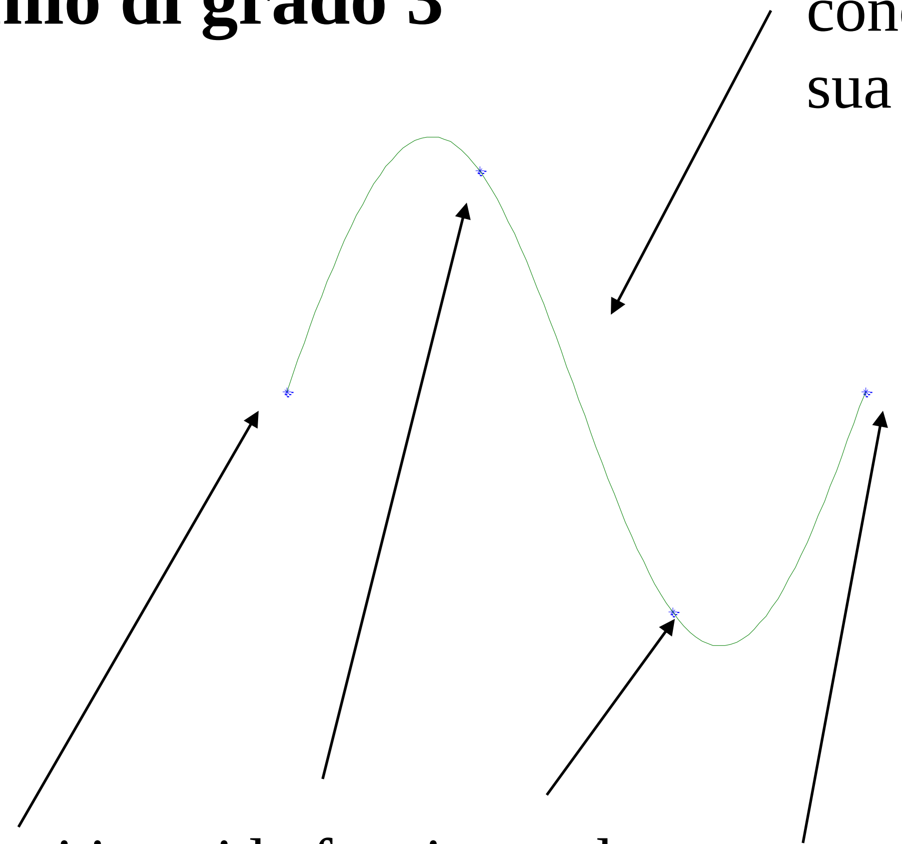
il quale è ≠0 nel caso in cui $x_i \neq x_k$ per $i \neq k$ (nodi distinti).

Pertanto la soluzione esiste ed è unica, e quindi il polinomio interpolatore esiste ed è unico.

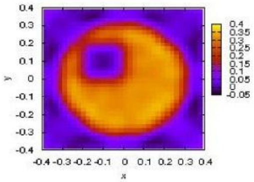


Approssimazione mediante polinomio di grado 3

funzione f(x) da approssimare,
conosciuta attraverso una
sua tabulazione x_i, y_i , i=0,1,2,3



punti in cui la funzione ed
il polinomio devono coincidere



Esistenza ed unicità del polinomio interp. (caso generale)

Trova

$$p(x) \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

tale che

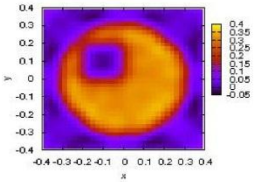
$$a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n = y_0$$

$$a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_1^n = y_1$$

$$\ldots.$$

$$a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_n x_n^n = y_n$$

Questo è un sistema lineare (n+1)×(n+1) in cui le incognite sono gli n+1 parametri a_0, …, a_n



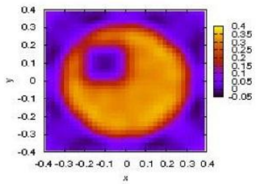
Il determinante della matrice del sistema è

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} \left(x_j - x_i \right)$$

determinante di Vandermonde

il quale è ≠0 nel caso in cui $x_i, \neq x_k$ per i≠k (nodi distinti).

Pertanto la soluzione esiste ed è unica, e quindi il polinomio interpolatore esiste ed è unico. Possiamo riassumere il risultato tramite il teorema seguente:



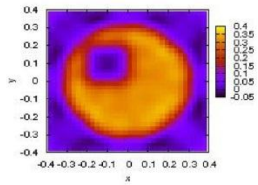
Teorema (esistenza e unicità)

Dati gli n+1 punti, detti nodi di interpolazione,

$$(x_i,\ y_i),\quad \text{per}\quad i = 0,1,2,\ldots,n,\qquad x_i \neq x_k\ \text{ se } i \neq k,$$

esiste ed è unico il polinomio interpolatore $p \in P_n$, ossia il polinomio $p \in P_n$ tale che

$$p(x_i) = y_i,\quad i = 0,1,2,\ldots,n$$

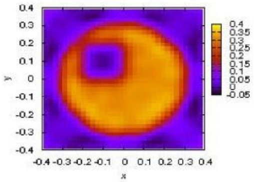


Osservazione

Sulla base di quanto visto, per trovare il polinomio interpolatore su n+1 nodi è sufficiente risolvere un sistema lineare in n+1 incognite.

La soluzione del sistema ci fornisce i coefficienti del polinomio.

Esistono tuttavia delle formule che danno in modo diretto il polinomio interpolante, senza la necessità di risolvere il sistema di Vandermonde.



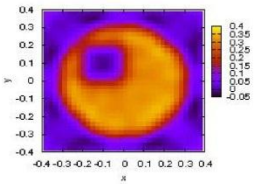
Costruzione dei polinomi interpolanti mediante la rappresentazione di Lagrange

L'insieme dei polinomi P_n è uno spazio lineare di dimensione n+1, ed una sua base è formata dai polinomi

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n$$

Un'altra base è data dagli n+1 polinomi seguenti

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$



Tale base, detta base di Lagrange, ha la proprietà

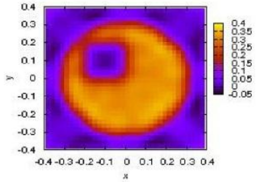
$$L_i(x_k) = \partial_{ik} = \begin{cases} 1 & se\ k = i \\ 0 & se\ k \neq i \end{cases} \qquad k = 0,1,\ldots,n$$

Allora, per mezzo di tale base, il polinomio interpolatore relativo ai punti x_i,y_i, per i=0,1,…,n, assume la semplice forma seguente

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

ed è chiamato polinomio interpolatore (secondo la rappresentazione) di Lagrange.

Oss. Questa rappresentazione esplicita del polinomio interpolatore è un’altra dimostrazione di esistenza e unicità.



Esempio per n=2.

La base di polinomi è

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2}$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$

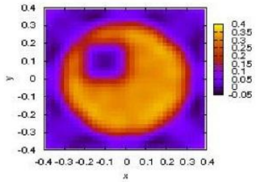
$$L_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Si osservi che

$$L_0(x_0) = 1, \quad L_0(x_1) = 0, \quad L_0(x_2) = 0$$

$$L_1(x_0) = 0, \quad L_1(x_1) = 1, \quad L_1(x_2) = 0$$

$$L_2(x_0) = 0, \quad L_2(x_1) = 0, \quad L_2(x_2) = 1$$

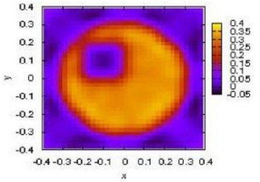


Il polinomio interpolante (o polinomio interpolatore) è

$$p(x) = y_0 \, \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} + y_1 \, \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \, \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

È immediato verificare che

$$p(x_0) = y_0, \quad p(x_1) = y_1, \quad p(x_2) = y_2$$



Interpolazione di Hermite

Data una funzione f(x) di cui nei punti x_i, per i=0,1,…,k, si conoscono i valori $y_i=f(x_i)$ e di eventuali derivate. Con l'interpolazione di Hermite si cerca il polinomio che nei punti x_i, i=0,1,…,k, assume gli stessi valori sia della funzione che delle sue derivate.

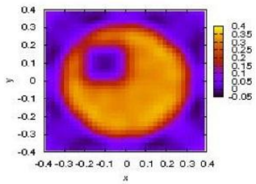
nodi

valore della funzione

valore della derivata 1[a]

valore della derivata α_i di ordine massimo per x_i

$$
\begin{array}{ccccc}
x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_k \\
y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_k \\
y_0^{(1)} & y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & y_k^{(1)} \\
y_0^{(2)} & y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \dots & y_k^{(2)} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & y_1^{(\alpha_1)} & \dots & \dots & \dots \\
\dots & & y_2^{(\alpha_2)} & \dots & y_k^{(\alpha_k)} \\
y_0^{(\alpha_0)} & & & \dots &
\end{array}
$$

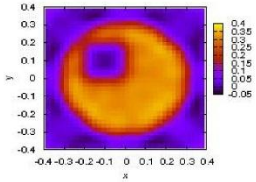


Formulazione matematica dell'interpolazione di Hermite

Dati k+1 punti distinti $x_0, x_1, \ldots, x_k$ e k+1 numeri interi naturali $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$, sia $n=k+\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_k$. Per ogni insieme di numeri $y_i^{(l)}$, i=0,1,…,k e l=0,1,…, α_i, esiste ed è unico il polinomio $p(x) \in P_n(x)$ tale che

$$\frac{d^l p(x_i)}{dx^l} = y_i^{(l)}, \; i = 0,1,\ldots,k; \; l = 0,1,\ldots,\alpha_i$$

Tale polinomio è detto polinomio interpolatore di Hermite.



L'interpolazione di Hermite nel caso k=0 (ossia si considera un solo punto x_0) ha il significato seguente.

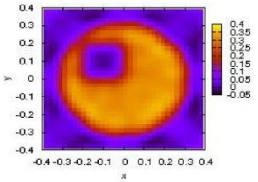
In un punto x_0 si conosce il valore y_0 di una funzione f(x) ed i valori delle sue derivate $f^{(l)}(x_0) = y_0^{(l)}$ **l=1,…, α_0=:α .**

Si vyole determinare il polinomio di grado n= α tale che

$$\frac{d^l p(x_0)}{dx^l} = y_0^{(l)}, \quad l = 0,1,\dots,\alpha$$

In tal caso il polinomio cercato corrisponde allo sviluppo di Taylor fino alla derivata α di centro x_0 , ovvero

$$p(x) = f(x_0) + f\,'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{\alpha!} f^{(\alpha)}(x_0)(x-x_0)^\alpha$$

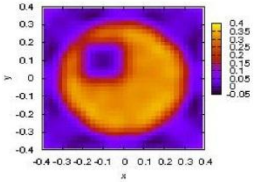


Osservazione

I problemi di interpolazione visti finora sono dei casi particolari del problema generale dell'interpolazione lineare.

Ovviamente i risultati teorici sull'esistenza e unicità della soluzione che si dimostrano per il problema generale valgono in ogni caso particolare (come già visto per l'interpolazione di Lagrange ed Hermite).

Spesso è richiesto esclusivamente di determinare il valore del polinomio p(x) in un punto x fissato. In tal caso non occorre determinare i coefficienti del polinomio, ma si utilizza l'algoritmo seguente, più economico.



Algoritmo di Neville (idea generale)

Questo algoritmo permette di calcolare in un (generico) punto x_s il valore del polinomio interpolatore $p(x_s)$ data la tabulazione x_i, y_i, $i=0,2,\ldots,n$. Introducendo la notazione

$$P_0(x) = y_0 \text{ è il polinomio di grado 0 per } (x_0, y_0)$$

$$P_1(x) = y_1 \text{ è il polinomio di grado 0 per } (x_1, y_1)$$

$$\ldots$$

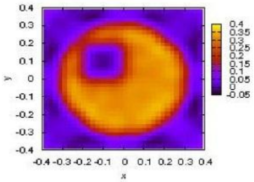
$$P_n(x) = y_n \text{ è il polinomio di grado 0 per } (x_n, y_n)$$

$$P_{0,1}(x) \text{ è il polinomio di grado 1 per } (x_0, y_0), (x_1, y_1)$$

$$\ldots$$

$$P_{n,n-1}(x) \text{ è il polinomio di grado 1 per } (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$$

$$\ldots$$



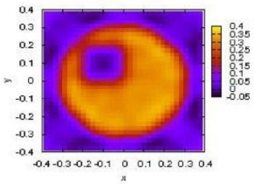
E’ facile verificare che, per il grado 1, si ha

$$P_{0,1}(x) = \frac{(x - x_0)P_1(x) - (x - x_1)P_0(x)}{x_1 - x_0} \quad \text{è il polinomio per} \, (x_0, y_0) \, \text{e} \, (x_1, y_1)$$

$$P_{1,2}(x) = \frac{(x - x_1)P_2(x) - (x - x_2)P_1(x)}{x_2 - x_1} \quad \text{è il polinomio per} \, (x_1, y_1) \, \text{e} \, (x_2, y_2)$$

$$\dots$$

$$P_{(k-1),k}(x) = \frac{(x - x_{k-1})P_k(x) - (x - x_k)P_{k-1}(x)}{x_k - x_{k-1}} \quad \text{è il polinomio per} \, (x_{k\text{-}1}, y_{k-1}) \, \text{e} \, (x_k, y_k)$$



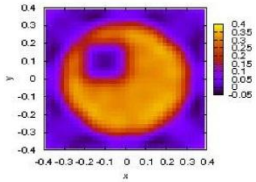
Quest'ultima può essere generalizzata per ricorrenza, ottenendo la relazione ricorsiva seguente

$$P_{i,i+1,\ldots,k}(x) = \frac{(x - x_i)P_{i+1,\ldots,k}(x) - (x - x_k)P_{i,i+1,\ldots,(k-1)}(x)}{x_k - x_i}$$

Questo è il polinomio interpolante di grado k-i per (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), …, (x_k, y_k).

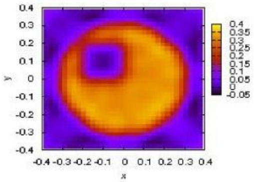
Per k=n ed i=0, si ottiene così che il valore del polinomio interpolatore di grado n+1 nel punto x_s è

$$P_{0,1,\ldots,n}(x_s)$$



Il procedimento (Neville) può essere schematizzato come segue

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & k=0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
x_0 & y_0 = P_0(x) & & & \\
 & & P_{01}(x) & & \\
x_1 & y_1 = P_1(x) & & P_{012}(x) & \\
 & & P_{12}(x) & & \boxed{P_{0123}(x)} \\
x_2 & y_2 = P_2(x) & & P_{123}(x) & \\
 & & P_{23}(x) & & \\
x_3 & y_3 = P_3(x) & & & \\
\end{array}
$$



Introducendo la notazione

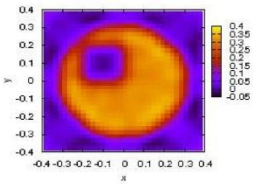
$$T_{i+k,\,k} = P_{i,\,i+1,\,\dots,\,i+k}$$

si trova la relazione

$$T_{i,\,k} = T_{i,\,k-1} + (T_{i,\,k-1} - T_{i-1,\,k-1})\frac{x - x_i}{x_i - x_{i-k}}$$

dove $T_{i,0}=y_i$ e $1 \le k \le i$, $i=0,1,\dots,n$.

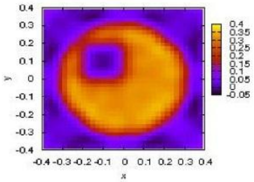
Il procedimento di Neville con la nuova notazione per il calcolo in un generico punto x_s del valore del polinomio interpolante può essere schematizzato come segue.



Procedimento di Neville

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & k=0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
x_0 & y_0 = T_{00} & & & \\
 & & T_{11} & & \\
x_1 & y_1 = T_{10} & \searrow & T_{22} & \\
 & & T_{21} & & \boxed{T_{33}} \\
x_2 & y_2 = T_{20} & \nearrow & T_{32} & \\
 & & T_{31} & & \\
x_3 & y_3 = T_{30} & & &
\end{array}
$$

Nell'implementazione si opera su un unico array T



Algoritmo di Neville

t(0)=y(0)

for i=1:n

    t(i)=y(i)

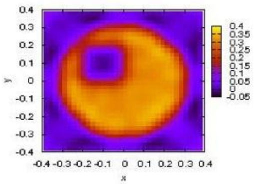
    for j=i-1:-1:0

        t(j)=t(j+1)+(t(j+1)-t(j))*(x_s-x(i))/(x(i)-x(j))

    end

end

f(x_s)=t(0)

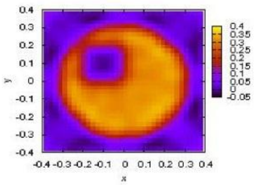


Convergenza dell’interpolazione

È importante riuscire a stimare l’errore che si commette quando si approssima una funzione tramite un polinomio interpolatore: i risultati teorici seguenti danno delle indicazioni molto utili a tale scopo.

In generale, si utilizza il concetto di norma di funzione.

Ad esempio, la norma del massimo e la norma 1 sono norme di funzioni usate in C[a,b], dove C[a,b] è l’insieme di tutte le funzioni continue nell’intervallo chiuso [a,b].

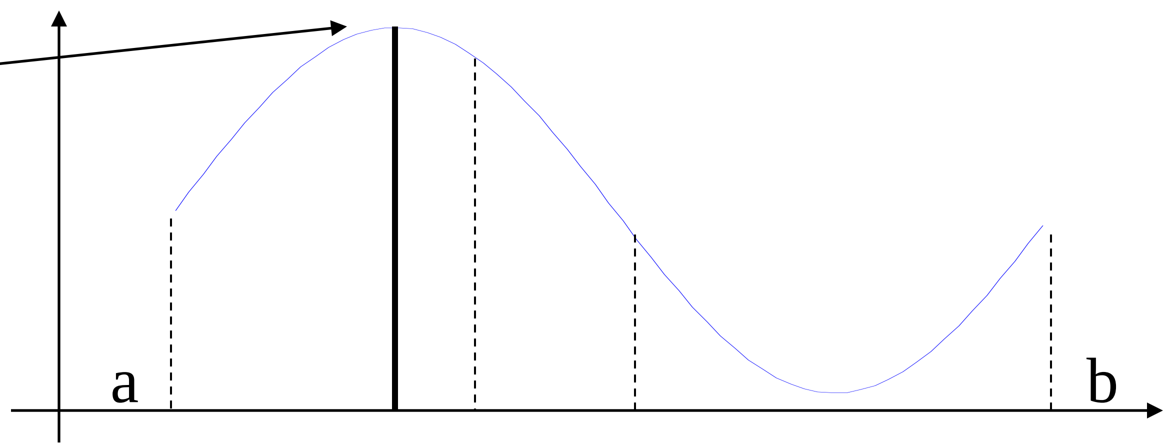


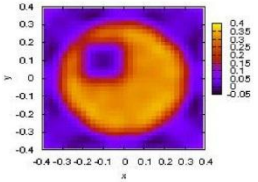
Norma del massimo

Data una funzione f(x)∈ C[a,b], si ha

$$\| f(x) \|_\infty = \max_{a \le x \le b} | f(x) |$$

Il valore massimo assunto dalla funzione in [a,b] è la norma del massimo. Tale valore esiste sempre (teorema del max di Weierstrass).



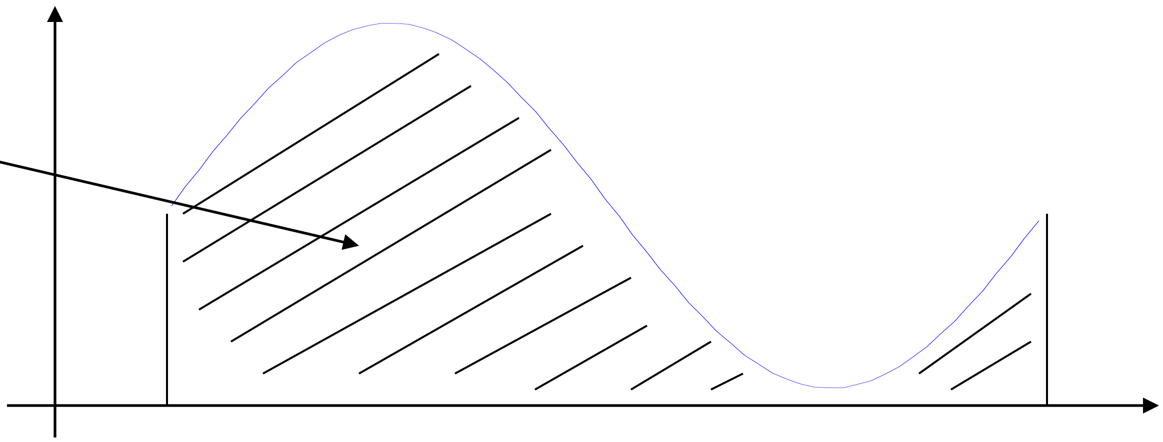


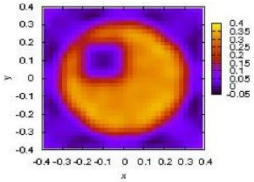
Norma 1

Data una funzione f(x)∈ C[a,b], si ha

$$\| f(x) \|_1 = \int_a^b | f(x) | dx$$

L’area del valore assoluto della funzione è la norma 1.



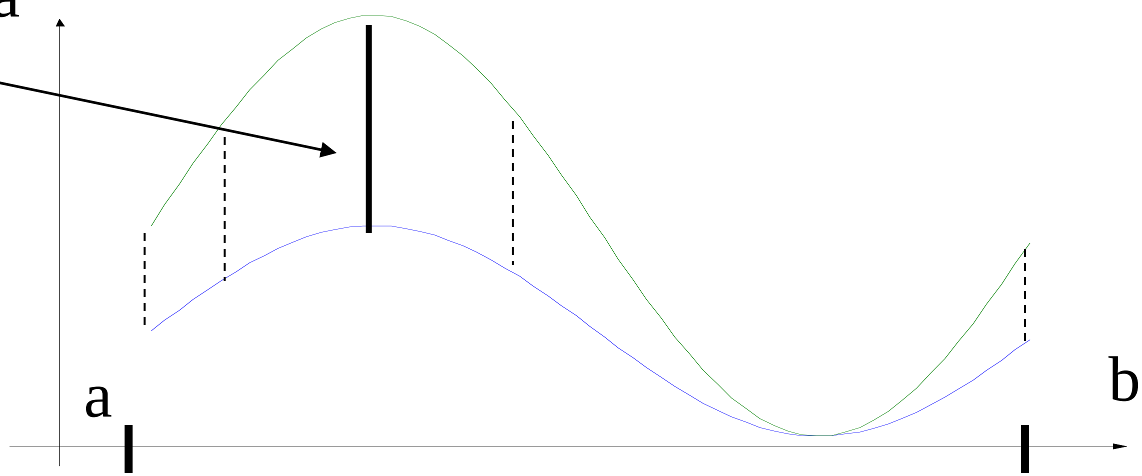


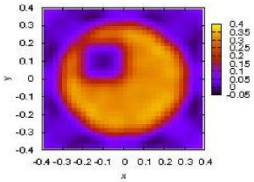
Distanza associata alla norma del massimo

Date due funzioni f(x) e g(x) ∈ C[a,b], si ha

$$dist(f,g) = \| f(x) - g(x) \|_\infty = \max_{a \le x \le b} | f(x) - g(x) |$$

dist(f,g)=massima differenza in valore assoluto



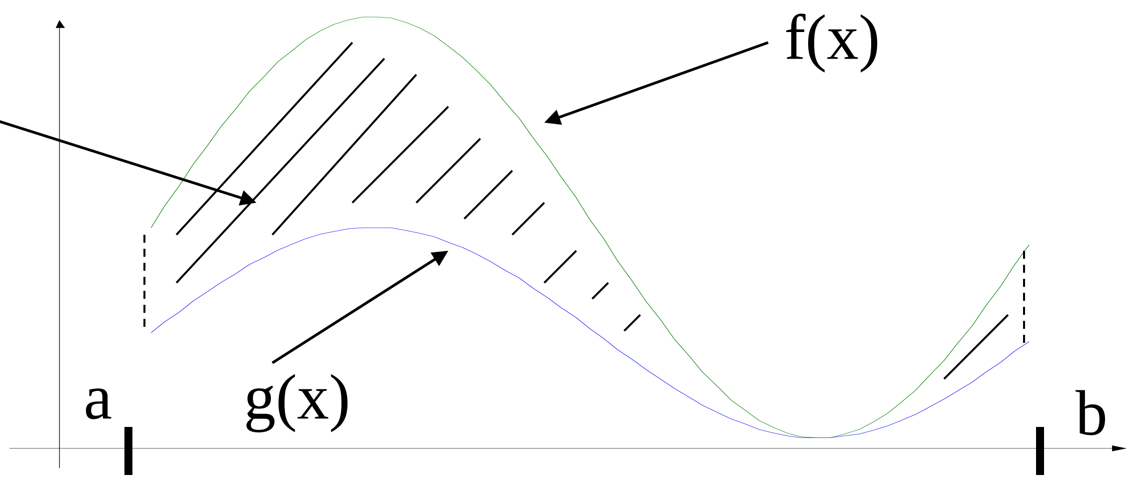


Distanza associata alla norma 1

Date due funzioni f(x) e g(x) $\in$ C[a,b], si ha

$$dist(f,g) = \| f(x) - g(x) \|_1 = \int_a^b | f(x) - g(x) | dx$$

dist(f,g)= misura della superficie tratteggiata



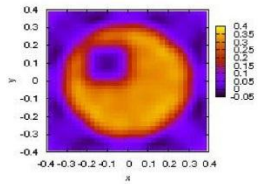
Interpolazione polinomiale

Generalizzazione della norma 1 per funzioni

La norma 2

Data una funzione f(x)$\in$C[a,b], con C[a,b] l'insieme di tutte le funzioni continue nell'intervallo [a,b], si ha

$$\| f(x) \|_2 = \left(\int_a^b (f(x))^2 dx \right)^{1/2}$$



La norma p, per $1 \leq p < \infty$.

Si consideri l'insieme $L^p([a,b])$ di tutte le funzioni per cui l'integrale

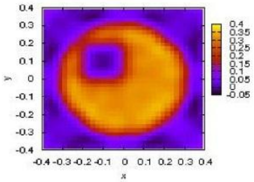
$$\int_a^b |f(x)|^p dx$$

esiste ed è finito (tale insieme è uno spazio lineare).

Data una funzione $f(x) \in L^p([a,b])$, la norma p di f(x) è data da

$$\| f(x) \|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Osservazione: C[a,b] è strettamente contenuto in $L^p([a,b])$.

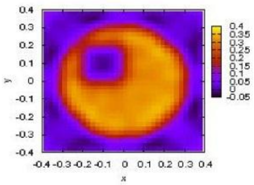


Teorema di Weierstrass

Sia f(x) una funzione continua su un intervallo limitato e chiuso [a,b]. Allora per ogni ε>0 esiste un intero n (dipendente da ε), ed un polinomio $P_n(x)$ di grado al più n tale che

$$\| f(x) - P_n(x) \|_\infty < \varepsilon$$

con $\| \cdot \|_\infty$ la norma del massimo per funzioni.

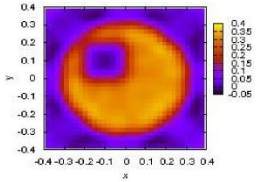


Il teorema afferma che l'insieme dei polinomi è denso in C[a,b] nella norma del massimo. Non fornisce però alcuna informazione sull'interpolazione polinomiale.

Osservazione

Il teorema di Weierstrass dimostra che l'insieme delle funzioni continue C[a,b] è separabile.

Infatti il teorema consente di concludere che l'insieme dei polinomi 1, x, x^2, x^3, …. è chiuso (o completo) in C[a,b].

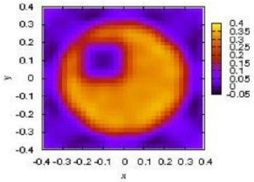


Osservazione

La dimostrazione del teorema di Weierstrass fornisce un modo per costruire particolari polinomi (detti polinomi di Bernstein) che approssimano la funzione (la dimostrazione è quindi di carattere costruttivo).

Purtroppo il grado del polinomio approssimante, in generale, è molto elevato. Per esempio se si vuole approssimare la funzione $(2-x)^{-1}$ per $\varepsilon=0.2\cdot10^{-9}$ si ottiene

$$n \cong 10^9$$



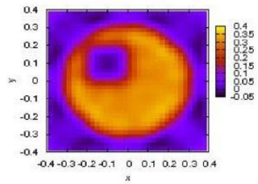
Matrice di interpolazione (definizione)

Si chiama matrice di interpolazione sull'intervallo [a,b] una matrice triangolare del tipo

$$\begin{array}{cccc} x_0^0 & & & \\ x_0^1 & x_1^1 & & \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \\ . & . & . & . \end{array}$$

con $x_i^j \in [a,b]$ **e gli elementi in ciascuna riga distinti.**

Gli elementi x_i^j **di ciascuna riga, ognuno associato al corrispondente valore** y_i^j **, rappresentano i j+1 nodi di interpolazione del polinomio interpolatore di grado j.**



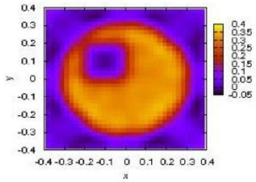
Denotiamo con $P_n(f)(x)$ il polinomio di interpolazione di f nei punti della (n+1)-sima riga. Allora vale il seguente:

Teorema di Faber

Per ogni matrice di interpolazione in un intervallo limitato [a,b], esiste una funzione continua f(x) tale che $P_n(f)(x)$ non converge uniformemente a f(x) per $n\to\infty$, cioè tale che

$$\lim_{n\to\infty} \| f(x) - P_n(f)(x) \|_\infty \neq 0$$

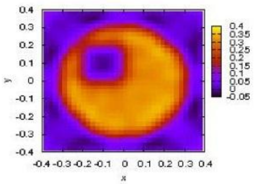
Osservazione: f dipende dalla matrice di interpolazione.



Osservazione

Il teorema di Faber consente di concludere che:

scelti i nodi di interpolazione, quando si vuole utilizzare l'interpolazione polinomiale per approssimare funzioni continue accade sempre che, per almeno una qualche funzione particolare, pur aumentando i punti di interpolazione (e quindi il grado del polinomio), la distanza tra la funzione ed il polinomio non tende a zero.

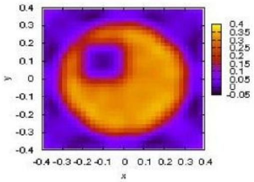


Interpolazione polinomiale

Non tutto è però cosi' negativo… Vale infatti il seguente

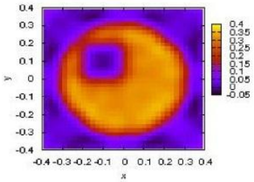
Teorema

Se f(x) è una funzione continua su [a,b], si può scegliere una matrice di interpolazione in modo tale che la corrispondente successione di polinomi di interpolazione converga uniformemente a f(x) su [a,b].



Osservazione

Segue dal precedente teorema che, se si deve approssimare una funzione continua tramite un polinomio di interpolazione, è sempre possibile scegliere in maniera opportuna la matrice di interpolazione in modo tale che, al crescere del numero dei nodi (e quindi del grado del polinomio), la distanza tra la funzione ed il polinomio interpolante tenda a zero. Si osservi che la matrice di interpolazione non è fissata a priori (infatti vale anche il Teorema di Faber…), ma dipende dalla particolare funzione continua da approssimare.



Rappresentazione dell’errore di interpolazione

Siano dati n+1 punti distinti, x_0, x_1, …,x_n, dell’intervallo chiuso e limitato [a,b] in R. Sia f(x) una funzione assegnata nello spazio C^{n+1}[a,b] e p(x) il polinomio di grado n tale che

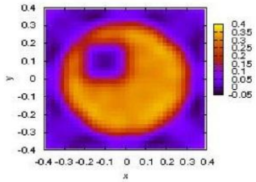
$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,1,\dots,n.$$

Allora per ogni x$\in$[a,b] esiste un valore ξ_x , con

$\xi_x \in$[min(x, x_0, x_1, …,x_n), max(x, x_0, x_1, …,x_n)] tale che

$$E(x) = f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\, f^{(n+1)}(\xi_x)$$

errore di interpolazione, ossia errore che si commette approssimando il valore della funzione con il valore del polinomio



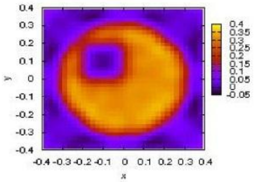
Corollario

Posto $M_{n+1}=\max_{x\in[a,b]}|f^{(n+1)}(x)|$, un limite superiore del valore assoluto dell'errore di interpolazione $E(x)=f(x)-p(x)$ risulta essere

$$|E(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)....(x-x_n)|$$

$$\leq (b-a)^{n+1} \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

Questa formula è molto utile per stimare, ad esempio, il numero di nodi necessari ad ottenere un errore di interpolazione minore di una data tolleranza massima.



Esempio (convergenza uniforme)

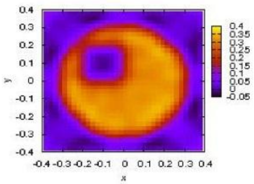
Sia $f(x)=e^x$. In tal caso, per ogni $x\in[a,b]$, $M_{n+1}= e^b$.

Si ettiene che l'errore di interpolazione è maggiorato da

$$\max_{x\in[a,b]} |E(x)| \le (b-a)^{n+1}\frac{M_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}e^b$$

In questo caso si ha la convergenza uniforme poiché

$$\lim_{n\to+\infty}\ \max_{x\in[a,b]} |E(x)| \le \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}e^b = 0$$

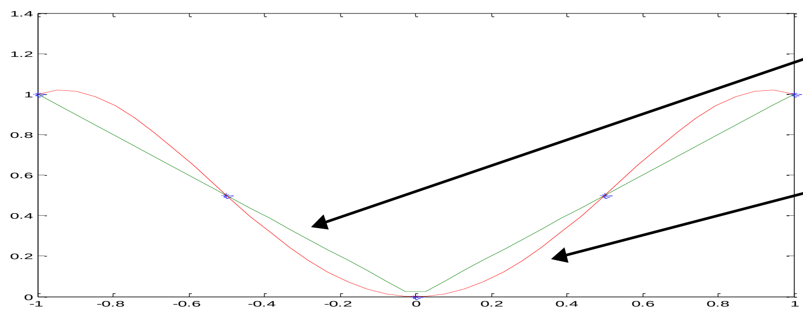


Esempio

Sia f(x)=|x| nell'intervallo [a,b]=[-1,1].

La matrice di interpolazione sia costituita da punti equidistanti. In tal caso, per n $\rightarrow\infty$ non si ha convergenza.

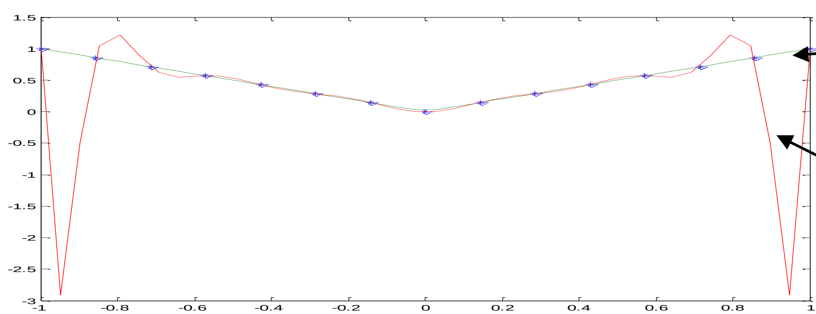
n=5



funzione f(x)

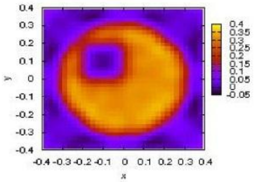
polinomio interpolante

n=15



funzione f(x)

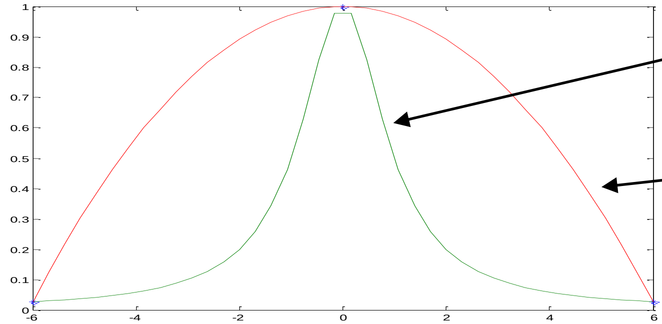
polinomio interpolante



Esempio (funzione di Runge, caso I)

Sia $f(x)=1/(1+x^2)$ nell'intervallo [-a,a], a>5. La matrice di interpolazione sia costituita da punti equidistanti. In tal caso, per $n \to \infty$ non si ha convergenza.

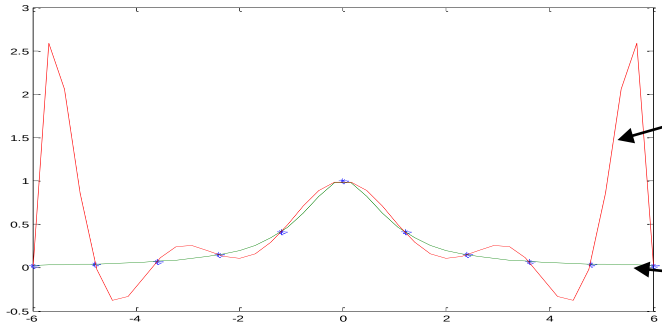
n=2



funzione f(x)

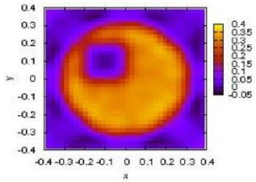
polinomio interpolante

n=10



polinomio interpolante

funzione f(x)



Polinomi di Chebichev (definizione)

$$T_0(x) = 1; \qquad T_1(x) = x;$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

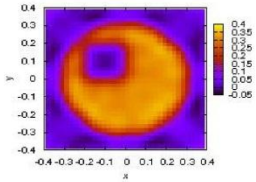
- **Essi sono polinomi ortogonali in C[-1,1] rispetto alla seguente definizione di prodotto scalare**

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} f(x) \cdot g(x)\, dx, \quad \text{g(x) e f(x) continue su [-1,1]}$$

- **Gli n+1 zeri di T_{n+1}(x) sono interni a (-1,1) e sono dati da**

$$z_{n+1,i} = \cos((2i-1)\pi / 2(n+1)), \quad \text{per i} = 1,\ldots \text{n}+1$$

- **I polinomi di Chebichev sono definiti mediante l'ortogonalità in [-1,1]. Si estendono a intervalli [a,b] mediante traslazione e dilatazione.**

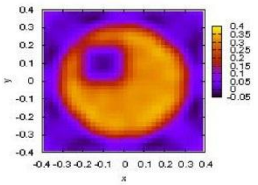


Teorema (Bernstein)

Se $f(x) \in C^1([a,b)]$, ovvero f(x) ha derivata prima continua nell'intervallo [a,b].

Allora il polinomio $P_n(f)$ di grado n di interpolazione di f su nodi di interpolazione corrispondenti agli zeri del polinomio di Chebichev di grado n+1 converge uniformemente a f(x) su [a,b] per $n \to \infty$, ossia

$$\lim_{n\to\infty} \| f(x) - P_n(f)(x) \|_\infty = 0$$

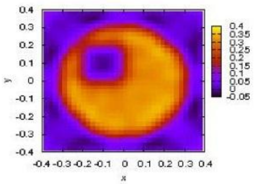


Osservazione

Il polinomio $P_n(f)$ di grado n di interpolazione di f sui nodi di Chebichev (ossia sui nodi di interpolazione corrispondenti agli zeri del polinomio di Chebichev di grado n+1), è il polinomio che interpola f(x) negli n+1 punti x_0, x_1, …,x_n seguenti

$$x_i = [(b-a)z_{n+1,i+1} + (a+b)]/2$$

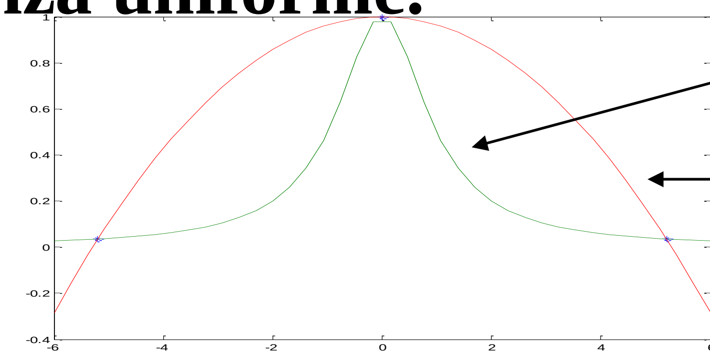
$$z_{n+1,i} = \cos((2i-1)\pi/2(n+1)), \quad \mathrm{per\ i} = 1,\ldots \mathrm{n}+1$$



Esempio (funzione di Runge, caso II)

Sia $f(x)=1/(1+x^2)$ nell'intervallo [-a,a], a>0. La matrice di interpolazione sia costituita da punti corrispondenti agli zeri dei polinomi di Chebichev. In tal caso, per $n \to \infty$ si ha convergenza uniforme.

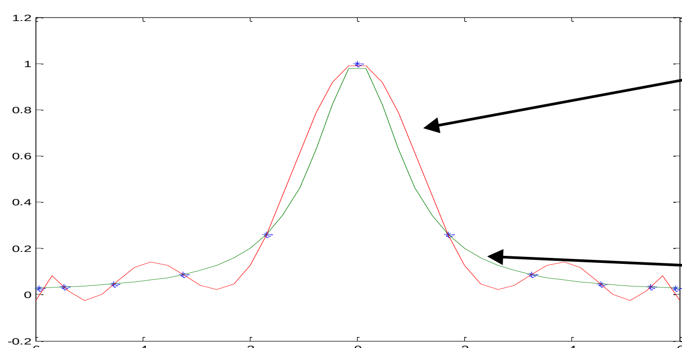
n=3



funzione f(x)

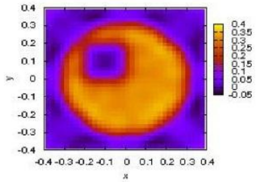
polinomio interpolante

n=11



polinomio interpolante

funzione f(x)



Osservazione

Gli zeri del polinomio di Chebichev si infittiscono ai bordi dell'intervallo [a,b].

Da un punto di vista euristico, ciò consente di avere maggiori informazioni vicino agli estremi dell'intervallo [a,b] di interpolazione. In tal modo si evitano le oscillazioni agli estremi presenti nell'interpolazione polinomiale della funzione di Runge con nodi equidistanti.